130 problemas de Física de 2.º de Bachillerato

versión 1.1 — 18 de abril de 2024
https://bitbucket.org/llantones/apuntesfq/src/master/
luis.munoz.edu arroba juntadeandalucia.es

INTERACCIÓN GRAVITATORIA

1. Una fuerza conservativa actúa sobre una partícula y la desplaza, desde un punto 1 hasta un punto 2, realizando un trabajo de 50 J. Se pide: *a*) La variación de energía potencial de la partícula en ese desplazamiento. Si la energía potencial de la partícula es cero en el punto 1, ¿cuánto valdrá en el punto 2? *b*) Si la partícula, de 5 g, se mueve bajo la influencia exclusiva de esa fuerza, partiendo del reposo en el punto 1, ¿cuál será la velocidad al llegar al 2. ¿Cuál será la variación de su energía mecánica?

   Solución. *a*) Sabemos que el trabajo realizado por una fuerza conservativa cumple:

   $$W_{\mathrm{c}} = -\Delta E_{\mathrm{p}}$$

   por lo que la variación de la energía potencial es:

   $$\Delta E_{\mathrm{p}} = -50 \text{ J}$$

   y la energía potencial en el punto 2 es:

   $$E_{\mathrm{p2}} - E_{\mathrm{p1}} = -50$$

   $$E_{\mathrm{p2}} = -50\mathrm{J}$$

   b) Como solo actúa una fuerza conservativa la energía mecánica se conserva por lo que no experimenta variación:

   $$E_{\mathrm{m}} = \text{cte.}$$

   $$E_{\mathrm{m1}} = E_{\mathrm{m2}}$$

   $$E_{\mathrm{c1}} + E_{\mathrm{p1}} = E_{\mathrm{c2}} + E_{\mathrm{p2}}$$

   como parte del reposo y la energía potencial en 1 es cero:

   $$0 = E_{\mathrm{c2}} + E_{\mathrm{p2}}$$

   $$E_{\mathrm{c2}} = -E_{\mathrm{p2}}$$

   $$\frac{1}{2}mv_2^2 = -E_{\mathrm{p2}}$$

   $$v_2 = \sqrt{\frac{-2E_{\mathrm{p2}}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 50}{5 \cdot 10^{-3}}} = 141,42 \text{ m/s}$$

Figura 1:

2. Un cuerpo de 10 kg se lanza con una velocidad de 30 m/s por una superficie horizontal lisa hacia el extremo libre de un resorte horizontal, de constante elástica 200 N/m, fijo por el otro extremo. *a*) Analice las variaciones de energía que tiene lugar a partir de un instante anterior al impacto con el resorte y calcule la máxima compresión del resorte. *b*) Discuta en términos energéticos las modificaciones relativas al apartado *a*) si la superficie horizontal tuviera rozamiento.

   Solución. *a*) El esquema se muestra en la figura 1. La energía mecánica se conserva en todo momento puesto que no hay rozamiento con la superficie y el muelle cumple la ley de Hooke, que es una fuerza conservativa. Por tanto, justo antes del impacto toda la energía mecánica es cinética y conforme se comprime el resorte se transforma en energía potencial elástica hasta que en el punto de máxima compresión la energía cinetica se hace cero y toda la energía mecánica es energía potencia. Al invertirse el movimiento ocurre al revés y conforme disminuye la energía potencial se transforma en energía cinética hasta que el cuerpo sale despedido del resorte con la misma velocidad con la que hubiera entrado. Para calcular la máxima compresión aplicamos la ley de la conservación de la energía mecánica: como la energía potencial inicial es cero y la cinética final también es cero:

$$E_{\mathrm{c1}} = E_{\mathrm{p2}}$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

$$x = \sqrt{\frac{mv_1^2}{k}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 30^2}{200}} = 6,7 \text{ m}$$

   b) Si hubiera rozamiento el cuerpo perdería constantemente energía mecánica por lo que impactaría con menos velocidad, se comprimiría menos y saldría despedido con menos velocidad que con la que impactó.

3. Dos satélites idénticos A y B describen órbitas circulares de diferente radio, siendo mayor el de A, alrededor de la Tierra. Conteste razonadamente: *a*) ¿Cuál de los dos tiene mayor energía cinética? *b*) Si los dos satélites estuvieran en la misma órbita y A tuviese menos masa que B, ¿cuál de los dos se movería con mayor velocidad? ¿cuál de ellos tendría más energía cinética?

   Solución. *a*) La figura 2 muestra el esquema. La única fuerza que actúa sobre los satélites es la fuerza de la gravedad y les proporciona la fuerza centrípeta para que puedan girar por lo que:

$$\frac{Gm_{\mathrm{T}}m_{\mathrm{s}}}{r^2} = \frac{m_{\mathrm{s}}v^2}{r}$$

$$\frac{Gm_{\mathrm{T}}}{r} = v^2$$

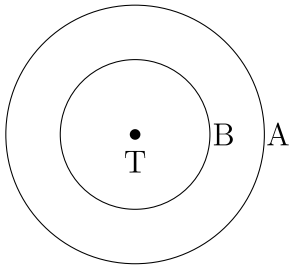

Figura 2:

$$v = \sqrt{\frac{Gm_\mathrm{T}}{r}}$$

y vemos que solo depende de la distancia, cuanto más cerca, más rápido se mueve y como tienen igual masa, el satélite B es el que tiene más energía cinética puesto que es el más rápido.

b) Como hemos dicho en el apdo. anterior tendrían la misma velocidad y B tendría más energía cinética puesto que tiene más masa.

4. *a*) Explique la influencia que tienen la masa y el radio de un planeta en la aceleración de la gravedad en su superficie y en la energía potencial de una partícula próxima a dicha superficie. *b*) Imagine que la Tierra aumentara su radio al doble y su masa al cuádruple. ¿cuál sería el nuevo valor de g? ¿y el nuevo periodo de la Luna?

   Solución. *a*) La aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta es:

$$g = \frac{Gm_\mathrm{p}}{r_\mathrm{p}^2}$$

   por lo que cuanto más masa y menor radio más aceleración habrá en la superficie. Pero influye más el radio puesto que está elevado al cuadrado. Si duplicamos la masa se duplica la aceleración pero si dividimos el radio la aceleración se cuadriplica. La energía potencial para un objeto en es:

$$E_\mathrm{p} = -\frac{Gm_\mathrm{p}m_\mathrm{objeto}}{r_\mathrm{p}}$$

   y depende linealmente de la masa e inversamente del radio.

   b) El valor inicial es:

$$g = \frac{Gm_\mathrm{T}}{r_\mathrm{T}^2}$$

   El nuevo valor lo denotamos con primas:

$$g' = \frac{Gm'_\mathrm{T}}{r'^2_\mathrm{T}}$$

   relacionamos los nuevos valores con los anteriores:

$$m'_\mathrm{T} = 4m_\mathrm{T} \qquad r'_\mathrm{T} = 2r_\mathrm{T}$$

y sustituimos:

$$g' = \frac{G4m_{\mathrm{T}}}{(2r_{\mathrm{T}})^2} = \frac{G4m_{\mathrm{T}}}{4r_{\mathrm{T}}^2} = \frac{Gm_{\mathrm{T}}}{r_{\mathrm{T}}^2} = g$$

por lo que g no cambia. Para el periodo de la Luna primero deducimos de qué depende. Sabemos que la fuerza de la gravedad le proporciona la fuerza centrípeta:

$$\frac{Gm_{\mathrm{T}}m_{\mathrm{L}}}{r_{T-L}^2} = \frac{m_{\mathrm{L}}v^2}{r_{T-L}}$$

$$\frac{Gm_{\mathrm{T}}}{r_{T-L}} = v^2 \tag{1}$$

Para el movimiento circular se cumple:

$$v = \omega r \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

que combinadas quedan:

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

y sustituyendo en la ecuación 1:

$$\frac{Gm_{\mathrm{T}}}{r_{T-L}} = \frac{4\pi^2 r_{T-L}^2}{T^2}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r_{T-L}^3}{Gm_{\mathrm{T}}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r_{T-L}^3}{Gm_{\mathrm{T}}}} \tag{2}$$

y vemos que el periodo no depende del radio terrestre sino de la distancia Tierra-Luna. Calculemos el nuevo periodo:

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{r_{T-L}^3}{Gm'_{\mathrm{T}}}}$$

y sustituimos $m'_{\mathrm{T}} = 4m_{\mathrm{T}}$:

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{r_{T-L}^3}{G4m_{\mathrm{T}}}}$$

y buscamos la ecuación del periodo original:

$$T' = \frac{1}{2}2\pi\sqrt{\frac{r_{T-L}^3}{Gm_{\mathrm{T}}}} = \frac{1}{2}T$$

por lo que el periodo de la Luna se reduciría a la mitad (recuerda que el periodo sinódico, periodo entre dos fases, son 29 días y medio y no 28 como erróneamente se dice).

5. Comente las siguientes afirmaciones, razonando si son verdaderas o falsas: *a*) Existe una función energía potencial asociada a cualquier fuerza. *b*) El trabajo de una fuerza conservativa sobre una partícula que se desplaza entre dos puntos es menor cuando el desplazamiento se realiza a lo largo de la recta que los une.

   Solución. *a*) Es falsa, solo las fuerzas conservativas tienen asociadas energía potencial. *b*) Es falsa puesto que para una fuerza conservativa el trabajo solo depende de los puntos inicial y final.

6. Comente las siguientes afirmaciones: *a*) Un móvil mantiene constante su energía cinética mientras actúa sobre él: *i*) una fuerza; *ii)* varias fuerzas. *b*) Un móvil aumenta su energía potencial mientras actúa sobre él una fuerza.

   Solución. *a*) *i*) Es cierto si la fuerza es centrípeta, como en el MCU. En otro caso la componente tangencial de la fuerza modificará la energía cinética. *ii)* Es cierto si todas las fuerzas se anulan (reposo o MRU), si la resultante de las fuerzas es centrípeta, o si las componentes tangenciales se anulan y solo quedan componente centípetas. *b*) Si hay energía potencial significa que hay un campo, por lo que existe una fuerza debida a dicho campo, y esa fuerza, de manera espontánea, hace que el móvil disminuya su energía potencial, por lo que en este caso la afirmación no sería correcta. Como ejemplo tenemos el campo gravitatorio y un móvil que descienda debido a la fuerza gravitatoria, en este caso solo actúa una fuerza pero la energía potencial disminuye. La afirmación sería correcta si el móvil lleva una inercia en contra del campo, en el ejemplo anterior sería que el cuerpo ascendiera alejándose de la superficie terrestre tras lanzarlo con velocidad, en este caso solo actuaría una fuerza y el móvil aumentaría su energía potencial.

7. Un cuerpo se lanza hacia arriba por un plano inclinado de 30°, con una velocidad inicial de 10 m/s. *a*) Explique cualitativamente cómo varían las energías cinética, potencial y mecánica del cuerpo durante la subida. *b*) ¿Cómo variaría la longitud recorrida si se duplica la velocidad inicial?, ¿y si se duplica el ángulo del plano?

   Solución. *a*) Como se ve en la figura 3 sobre el cuerpo solo actúa el peso y la normal a la superficie. La primera es conservativa y la segunda no realiza trabajo

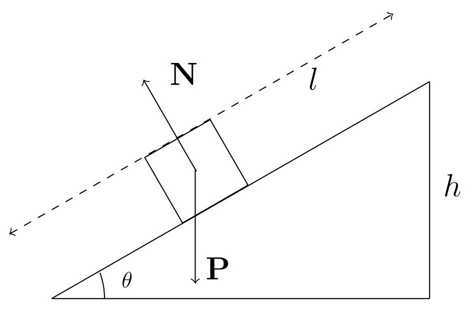

Figura 3:

   al ser perpendicular al desplazamiento por lo que podemos afirmar que se conserva la energía mecánica. Conforme el cuerpo asciende por el plano su energía cinética desciende y se transforma en energía potencial, que lógicamente aumenta. *b*) Como la energía cinética se transforma en energía potencial:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

por trigonometría relacionamos la altura ascendida h con la longitud recorrida por el plano l:

$$h = l \operatorname{sen}\theta$$

sustituimos:

$$\frac{1}{2}v^2 = gl \operatorname{sen}\theta$$

y despejamos la longitud en función de la velocidad:

$$l = \frac{v^2}{2g \operatorname{sen}\theta}$$

Denotemos a las magnitudes que cambian con una prima:

$$l' = \frac{v'^2}{2g \operatorname{sen}\theta}$$

si la velocidad se duplica se cumple que $v' = 2v$. Sustituyendo y buscando la fórmula original:

$$l' = \frac{(2v)^2}{2g \operatorname{sen}\theta} = \frac{4v^2}{2g \operatorname{sen}\theta} = 4l$$

por lo que la longitud recorrida se cuadriplica. Si se duplica el ángulo:

$$l' = \frac{v^2}{2g \operatorname{sen}\theta'}$$

$$\theta' = 2\theta$$

$$l' = \frac{v^2}{2g \operatorname{sen} 2\theta}$$

usando la fórmula del ángulo doble $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$:

$$l' = \frac{v^2}{2g2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta} = \frac{l}{2\cos\theta}$$

y la longitud se acorta con el factor $\frac{1}{2\cos\theta}$. Podemos comprobarlo suponiendo que el ángulo inicial vale 30°:

$$\frac{1}{2\cos 30^\circ} = \frac{1}{2\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1,73}{3} = 0,58$$

por lo que longitud recorrida se reduce a casi la mitad.

8. Razone las respuestas a las siguientes preguntas: a) Si el cero de energía potencial gravitatoria de una partícula de masa m se sitúa en la superficie de la Tierra, ¿cuál es el valor de la energía potencial de la partícula cuando ésta se encuentra

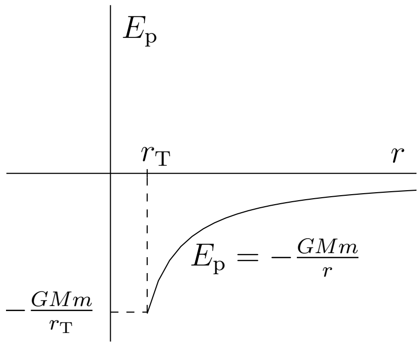

Figura 4:

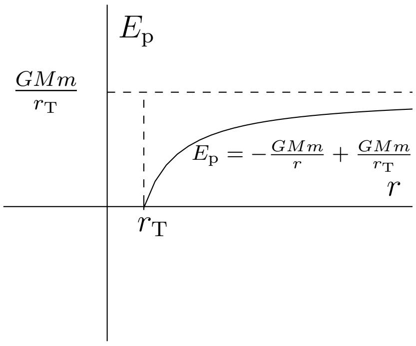

Figura 5:

a una distancia infinita de la Tierra? *b*) ¿Puede ser negativo el trabajo realizado por una fuerza gravitatoria?

Solución. *a*) La gráfica de la energía potencial terrestre se muestra en la figura 4. Llamemos a la masa de la Tierra M. Si subimos la gráfica el valor $\frac{GMm}{r_T}$ nos quedaría como muestra la figura 5. Por tanto la energía potencial en el infinito cuando elegimos el cero en la superficie terrestre es:

$$E_P = -\frac{GMm}{r} + \frac{GMm}{r_T} = -\frac{GMm}{\infty} + \frac{GMm}{r_T} = \frac{GMm}{r_T}$$

b) Sí, por ejemplo cuando un cuerpo asciende el trabajo realizado por el peso es negativo puesto que $W_c = F\Delta r \cos 180 < 0$.

9. Analice las siguientes proposiciones, razonando si son verdaderas o falsas: *a*) El trabajo realizado por una fuerza sobre un cuerpo es igual a la variación de su energía cinética. *b*) La energía cinética necesaria para escapar de la Tierra depende de la elección del origen de energía potencial.

   Solución. *a*) El teorema trabajo-energía dice que $W_{total} = \Delta E_c$ por lo que es falso, solo es cierto si es la única fuerza que actúa sobre el cuerpo. *b*) Como vemos en las figuras 4 y 5 la energía cinética necesaria para escapar de la Tierra no depende de la elección del origen de energía potencial, sino de la diferencia de energía potencial entre el infinito y la superficie terrestre.

10. Se lanza con la mano un piedra de 1 kg desde la superficie terrestre hasta una altura de 10 m. Con las ecuaciones mgh y $-\frac{GMm}{r}$ calcule: la energía potencial de

la piedra en la superficie terrestre, la energía potencial a los 10 m de altura y la diferencia de energía potencial entre la superficie terrestre y los 10 m de altura. ¿Qué tanto por ciento de error se comete al calcular la diferencia de energía potencial mediante mgh?
Datos: $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}, $R_\mathrm{T} = 6400$ km y $M_\mathrm{T} = 6 \cdot 10^{24}$ kg.

Solución. Para usar mgh elegimos el cero de energía potencial en el suelo y para $-\frac{GMm}{r}$ ya sabemos que el cero se encuentra en el infinito, por tanto:

$$E_{\mathrm{p}1} = 0 \qquad E_{\mathrm{p}1} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 1}{6,4 \cdot 10^6} = -6,253125 \cdot 10^7 \text{ J}$$

$$E_{\mathrm{p}2} = 1 \cdot 9,8 \cdot 10 = 98\text{J} \qquad E_{\mathrm{p}2} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 1}{6,40001 \cdot 10^6} = -6,25311523 \cdot 10^7 \text{ J}$$

$$\Delta E_\mathrm{p} = 98\text{J} \qquad \Delta E_\mathrm{p} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 1}{6,4 \cdot 10^6} = 97,705 \text{ J}$$

El valor más exacto es el obtenido con la fórmula $-\frac{GMm}{r}$ así que el error cometido al usar mgh es:

$$\frac{98 - 97,705}{97,705} \cdot 100 = 0,30\,\%$$

y como vemos, en este caso, es un error muy pequeño.

11. Se lanza con la mano una piedra de 1 kg desde la superficie terrestre hasta una altura de 10 m. *a*) Analice qué ocurre, desde el punto de vista energético, desde que la piedra se sostiene en la mano en reposo hasta que llega al punto más alto. *b*) Calcule la velocidad a la que se tiene que lanzar la piedra para llegar al punto más alto. Calcule el trabajo que realiza la fuerza peso. Calcule el trabajo que realiza la mano. Dato: use la ecuación mgh para calcular la energía potencial.

    Solución. *a*) Dividamos el lanzamiento en dos pasos, primero el no conservativo y segundo el conservativo. En el primer paso la mano realiza una fuerza no conservativa por lo que aplicamos el teorema trabajo-energía generalizado:

    $$W_\mathrm{nc} = \Delta E_m$$

    despreciamos la variación de la energía potencial entre el punto en el que la piedra está en reposo y el punto en el que abandona la mano con velocidad, por tanto:

    $$W_\mathrm{nc} = \Delta E_c$$

    y el trabajo no conservativo realizado por la mano (positivo) incrementa la energía mecánica de la piedra, en concreto incrementa su energía cinética. En el segundo paso solo actúa el peso así que se conserva la energía mecánica y por tanto la cinética se va transformando en potencial hasta que en el punto más alto toda la energía mecánica es energía potencial. *b*) Podemos calcularla fácilmente aplicando la conservación de la energía al paso segundo:

    $$E_{\mathrm{c}1} + E_{p1} = E_{\mathrm{c}2} + E_{p2}$$

    $$\frac{1}{2} m v_1^2 + 0 = 0 + mgh$$

$$v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 10} = 14 \text{ m/s}$$

y esta velocidad inicial del paso segundo es la velocidad final del paso primero. El trabajo realizado por la fuerza peso podemos calcularlo de dos maneras (para refrescar nuestra memoria), mediante la definición de energía potencial:

$$W_\mathrm{c} = -\Delta E_\mathrm{p} = mgh - 0 = 1 \cdot 9,8 \cdot 10 = -98 \text{ J}$$

y mediante la definición de trabajo:

$$W_\mathrm{c} = F\Delta r \cos 180° = 1 \cdot 9,8 \cdot 10 \cdot (-1) = -98 \text{ J}$$

El trabajo que realiza la mano lo calculamos mediante el teorema trabajo-energía generalizado:

$$W_\mathrm{nc} = \Delta E_c = \Delta E_{c2} - \Delta E_{c1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - 0 = \frac{1}{2}1 \cdot 14^2 = 98 \text{ J}$$

12. Imagine que se pudiera lanzar, con un cañón vertical, un objeto de 1000 kg hasta una altura de 6400 km sobre la superficie terrestre. *a*) Analice qué ocurre, desde el punto de vista energético, desde que el objeto se deja en reposo en el cañón hasta que llega al punto más alto. *b*) Calcule la velocidad a la que tiene que salir el objeto por el cañón. Calcule el trabajo que realiza la fuerza peso. Calcule el trabajo que realiza la pólvora.
Datos: $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}, $R_\mathrm{T} = 6400$ km y $M_\mathrm{T} = 6 \cdot 10^{24}$ kg.

    Solución. *a*) Dividamos el lanzamiento en dos pasos, primero el no conservativo y segundo el conservativo. En el primer paso la pólvora realiza una fuerza no conservativa por lo que aplicamos el teorema trabajo-energía generalizado:

$$W_\mathrm{nc} = \Delta E_m$$

despreciamos la variación de la energía potencial debida a la longitud del cañón, por tanto:

$$W_\mathrm{nc} = \Delta E_c$$

y el trabajo no conservativo realizado por la pólvora (positivo) incrementa la energía mecánica del objeto, en concreto incrementa su energía cinética. En el segundo paso solo actúa el peso así que se conserva la energía mecánica y por tanto la cinética se va transformando en potencial hasta que en el punto más alto toda la energía mecánica es energía potencial. *b*) Calculamos la velocidad aplicando la conservación de la energía al paso segundo y usamos la expresión completa de la energía potencial puesto que la altura no tiene un valor pequeño:

$$E_\mathrm{c1} + E_{p1} = E_\mathrm{c2} + E_{p2}$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_\mathrm{T}} = 0 - \frac{GMm}{r_\mathrm{T} + h}$$

Simplificamos la masa y multiplicamos toda la ecuación por 2:

$$v_1^2 - \frac{2GM}{r_\mathrm{T}} = -\frac{2GM}{r_\mathrm{T} + h}$$

Despejamos la velocidad:

$$v_1^2 = -\frac{2GM}{r_\mathrm{T}+h} + \frac{2GM}{r_\mathrm{T}}$$

Sacamos factor común:

$$v_1^2 = 2GM\left(\frac{-1}{r_\mathrm{T}+h} + \frac{1}{r_\mathrm{T}}\right)$$

y sustiuimos los valores:

$$v_1 = \sqrt{2\cdot 6,67\cdot 10^{-11}\cdot 6\cdot 10^{24}\left(\frac{-1}{12,8\cdot 10^6} + \frac{1}{6,4\cdot 10^6}\right)} = 7907,67 \text{ m/s}$$

y esta velocidad inicial del paso segundo es la velocidad final del paso primero. El trabajo realizado por la fuerza peso lo calculamos mediante la definición de energía potencial:

$$W_\mathrm{c} = -\Delta E_\mathrm{p}$$
$$W_\mathrm{c} = -\left(E_\mathrm{p2} - E_\mathrm{p1}\right)$$
$$W_\mathrm{c} = -E_\mathrm{p2} + E_\mathrm{p1}$$
$$W_\mathrm{c} = \frac{GMm}{r_\mathrm{T}+h} - \frac{GMm}{r_\mathrm{T}}$$
$$W_\mathrm{c} = GMm\left(\frac{1}{r_\mathrm{T}+h} - \frac{1}{r_\mathrm{T}}\right)$$
$$W_\mathrm{c} = 6,67\cdot 10^{-11}\cdot 6\cdot 10^{24}\cdot 1000\left(\frac{1}{12,8\cdot 10^6} - \frac{1}{6,4\cdot 10^6}\right) = -3,13\cdot 10^{10} \text{ J}$$

En este caso no podemos usar la definición de trabajo $W_\mathrm{c} = F\Delta r\cos 180^\circ$ porque el peso no es constante (g disminuye al ascender) y la fórmula anterior solo es válida si la fuerza es constante. El trabajo que realiza la pólvora lo calculamos mediante el teorema trabajo-energía generalizado:

$$W_\mathrm{nc} = \Delta E_c = E_{c2} - E_{c1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - 0 = \frac{1}{2}1000\cdot 7907,67^2 = 3,13\cdot 10^{10} \text{ J}$$

13. Un satélite artificial de 1000 kg gira alrededor de la Tierra en una órbita circular de 12800 km de radio. *a*) Explique las variaciones de energía cinética y potencial del satélite desde su lanzamiento en la superficie terrestre hasta que alcanzó su órbita y calcule el trabajo realizado. *b*) ¿Qué variación ha experimentado el peso del satélite respecto del que tenía en la superficie terrestre?
Datos: $G = 6,67\cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}, $R_\mathrm{T} = 6400$ km y $M_\mathrm{T} = 6\cdot 10^{24}$ kg.

Solución. *a*) Podemos explicarlo como en el ejercicio anterior, considerando que un dispositivo le comunica la velocidad necesaria en la superficie terrestre para llegar a la órbita pero en este caso vamos a considerar el caso real, que el motor del cohete continuamente realiza una fuerza superior al peso de modo que el cohete incrementa continuamente su velocidad. Como en este caso el satélite se queda en órbita, tiene una velocidad orbital que tendremos en cuenta en los cálculos. Así que la energía cinética pasa de cero en la superficie terrestre a un valor no nulo en la órbita. La energía potencial aumenta puesto que el satélite se aleja de la Tierra, como se puede ver en la gráfica 4. Por tanto la energía mecánica aumenta. Para calcular el trabajo realizado aplicamos el teorema trabajo-energía generalizado:

$$W_{\mathrm{nc}} = \Delta E_{\mathrm{m}}$$

$$W_{\mathrm{nc}} = E_{\mathrm{c2}} + E_{\mathrm{p2}} - (E_{\mathrm{c1}} + E_{\mathrm{p1}})$$

$$W_{\mathrm{nc}} = E_{\mathrm{c2}} + E_{\mathrm{p2}} - E_{\mathrm{c1}} - E_{\mathrm{p1}}$$

Como parte del reposo $E_{\mathrm{c1}} = 0$:

$$W_{\mathrm{nc}} = E_{\mathrm{c2}} - \frac{GMm}{r_{\mathrm{orb}}} + \frac{GMm}{r_{\mathrm{T}}} \tag{3}$$

El satélite en la órbita solo recibe la fuerza peso y esa fuerza le proporciona la fuerza centrípeta necesaria para girar por lo que se cumple que:

$$\frac{GMm}{r_{\mathrm{orb}}^2} = m \cdot \frac{v_{\mathrm{orb}}^2}{r_{\mathrm{orb}}}$$

Simplificando el radio y diviendo ambas miembros entre 2:

$$\frac{GMm}{2r_{\mathrm{orb}}} = \frac{1}{2} m v_{\mathrm{orb}}^2$$

que es la expresión de E_{c2} y sustituyendo en la ecuación 3:

$$W_{\mathrm{nc}} = \frac{GMm}{2r_{\mathrm{orb}}} - \frac{GMm}{r_{\mathrm{orb}}} + \frac{GMm}{r_{\mathrm{T}}}$$

$$W_{\mathrm{nc}} = -\frac{GMm}{2r_{\mathrm{orb}}} + \frac{GMm}{r_{\mathrm{T}}}$$

$$W_{\mathrm{nc}} = GMm \left(\frac{-1}{2r_{\mathrm{orb}}} + \frac{1}{r_{\mathrm{T}}} \right)$$

$$W_{\mathrm{nc}} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 10^{3} \left(\frac{-1}{2 \cdot 12,8 \cdot 10^{6}} + \frac{1}{6,4 \cdot 10^{6}} \right) = 4,67 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

b) El peso del satélite en la superficie terrestre es:

$$P = mg = 10^3 \cdot 9,8 = 9800 \text{ N}$$

y en la órbita:

$$P' = \frac{GMm}{r_{\mathrm{orb}}^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 10^{3}}{(12,8 \cdot 10^{6})^2} = 2442 \text{ N}$$

y la variación que experimenta el peso es:

$$P' - P = 2442 - 9800 = -7358 \text{ N}$$

14. Un satélite artificial en órbita geoestacionaria es aquel que, al girar con la misma velocidad angular de rotación que la Tierra, se mantiene sobre la misma vertical. *a*) Explique las características de esa órbita y calcule su altura respecto a la superficie de la Tierra. *b*) Razone qué valores obtendría para la masa y el peso de un cuerpo situado en dicho satélite, sabiendo que su masa en la Tierra es de 20 kg. Datos: G, R_{T} y M_{T}.

Solución. *a*) Para mantenerse siempre sobre la misma vertical no es suficiente que el satélite tenga la misma velocidad angular que la Tierra. Así, si consideramos una órbita vertical veremos que el satélite tarda un día en volver al mismo punto, por ejemplo el polo norte, pero que nunca se encuentra situado sobre el mismo punto en la Tierra. La única posilibidad es que el plano de la órbita sea horizontal y por tanto ecuatorial, ahora sí que gira solidariamente con la Tierra. Para calcular su altura aplicamos la segunda ley de Newton al satélite. Solo actúa la fuerza gravitatoria y esta le proporciona la fuerza centrípeta necesaria para girar:

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

$$\frac{GM}{r} = v^2$$

sustituimos $v = \omega r$:

$$\frac{GM}{r} = \omega^2 r^2$$

y despejamos la distancia al centro terrestre:

$$r = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}}$$

calculamos la velocidad angular de rotación:

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$$

sustituimos:

$$r = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{(7,27 \cdot 10^{-5})^2}} = 4,2297 \cdot 10^7 \text{ m} = 42297 \text{ km} \tag{4}$$

y su altura sobre la superficie terrestre es:

$$h = r - r_{\mathrm{T}} = 42297 - 6400 = 35897 \text{ km}$$

b) La masa nos indica la cantidad de materia que tiene un cuerpo y no depende de la gravedad por lo que en el satélite valdrá también 20 kg pero el peso sí varía puesto que la intensidad del campo gravitatorio disminuye:

$$P = \frac{GMm}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 20}{(4,2297 \cdot 10^7)^2} = 4,47 \text{ N}$$

así que el peso disminuye mucho, desde 196 hasta 4,47 N.

15. Un meteorito de 1000 kg colisiona con otro, a una altura sobre la superficie terrestre de 6 veces el radio de la Tierra, y pierde toda su energía cinética. *a*) ¿Cuánto pesa el meteorito en ese punto y cuál es su energía mecánica tras la colisión? *b*) Si cae a la Tierra, haga un análisis energético del proceso de caída. ¿Con qué velocidad llega a la superficie terrestre?, ¿dependerá esa velocidad de la trayectoria seguida? Datos: G, R_T y M_T.

Solución. El meteorito se encuentra a una distancia del centro terrestre de 7 veces el radio de la Tierra (figura 6) y la energía mecánica es debida solo a la energía

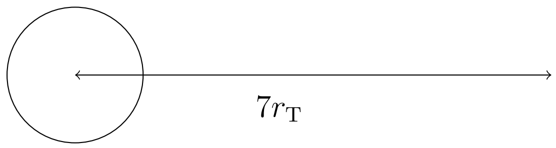

Figura 6:

potencial:

$$E_\mathrm{m} = -\frac{GMm}{r} = -\frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 6\cdot 10^{24}\cdot 10^{3}}{7\cdot 6,4\cdot 10^{6}} = -8,93\cdot 10^{9}\ \mathrm{J}$$

y el peso tiene dirección vertical, sentido hacia abajo y módulo:

$$P = \frac{GMm}{r^2} = \frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 6\cdot 10^{24}\cdot 10^{3}}{(7\cdot 6,4\cdot 10^{6})^2} = 199,40\ \mathrm{N}$$

b) Solo actúa el peso, que es una fuerza conservativa por lo que se conserva la energía mecánica. Una parte de la energía potencial inicial se transforma en cinética y la otra parte es la energía potencial que hay en la superficie terrestre cumpliéndose:

$$E_\mathrm{m1} = E_\mathrm{m2}$$
$$E_\mathrm{c1} + E_\mathrm{p1} = E_\mathrm{c2} + E_\mathrm{p2}$$
$$0 - \frac{GMm}{r} = E_\mathrm{c2} - \frac{GMm}{r_\mathrm{T}}$$

Obtenemos la velocidad con la que llega:

$$\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{GMm}{r} + \frac{GMm}{r_\mathrm{T}}$$

multiplicamos la ecuación por $\frac{2}{m}$:

$$v^2 = -\frac{2GM}{r} + \frac{2GM}{r_\mathrm{T}}$$

y sacamos factor común a $2GM$:

$$v = \sqrt{2GM\left(\frac{-1}{r} + \frac{1}{r_\mathrm{T}}\right)}$$

$$v=\sqrt{2\cdot 6,67\cdot 10^{-11}\cdot 6\cdot 10^{24}\left(\frac{-1}{7\cdot 6,4\cdot 10^{6}}+\frac{1}{6,4\cdot 10^{6}}\right)}=10353,57\ \mathrm{m/s}$$

Esa velocidad no dependerá de la trayectoria seguida porque al no actuar fuerzas no conservativas solo importan los puntos inicial y final. No obstante en la realidad, con rozamiento, el meteorito se desintegraría debido al calor producido por el rozamiento e incluso si no se desintegrara llegaría a una velocidad límite que dependería de su forma pero la cuestión es que nunca alcanzaría los 10353 m/s.

16. *a*) Enuncie la ley de gravitación universal y comente el significado físico de las magnitudes que intervienen en ella. *b*) Según la ley de la gravitación universal la fuerza que ejerce la Tierra sobre un cuerpo es proporcional a la masa de éste. ¿Por qué no caen más deprisa los cuerpos con mayor masa? *c*) Si la fuerza de la gravedad tuviera la siguiente expresión: $F=k$, donde k =cte., ¿qué cuerpos caerían mas rápido?

    Solución. *a*) La fuerza de atracción gravitatoria entre dos objetos es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa. La constante de proporcionalidad se llama constante de gravitación universal y su valor es:

    $$G=6,67\cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$$

    y la fórmula es:

    $$F=G\frac{Mm}{r^2}$$

    y vemos que la fuerza es mayor si las masas son mayores o si la distancia se acorta. *b*) La fuerza que ejerce la Tierra sobre un objeto es proporcional a su masa y cuando sustiumos dicha fuerza en la segunda ley de Newton vemos que la masa se simplifica y por tanto todos los cuerpo caen con la misma aceleración. Así que la fuerza gravitatoria se adapta a la masa del objeto para conseguir que todos caigan con la misma aceleración. *c*) Despejamos la segunda ley de Newton:

    $$F=ma\ \Rightarrow a=\frac{k}{m}$$

    y observamos que cuanta menos masa más rápido caerían.

17. La nave espacial Apolo 11 orbitó alrededor de la Luna con un periodo de 119 minutos y a una distancia media del centro de la Luna de $1,8\cdot 10^6$ m. Suponiendo que su órbita fue circular y que la Luna es una esfera uniforme: *a*) Determine la masa de la Luna y la velocidad orbital de la nave. *b*) ¿Cómo se vería afectada la velocidad orbital si la masa de la nave espacial se hiciese el doble? Razone la respuesta. Dato: $G=6,67\cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$

    Solución. La fuerza centrípeta la proporciona el peso y llamando a la masa de la Luna y de la nave M y m respectivamente, se cumple que:

    $$\frac{GMm}{r^2}=\frac{mv^2}{r}$$

$$\frac{GM}{r} = v^2 \tag{5}$$

sabemos que:

$$v = \omega r \text{ y } \omega = \frac{2\pi}{T} \text{ por lo que } v = \frac{2\pi r}{T}$$

sustituimos

$$\frac{GM}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$$

y despejamos:

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2 (1,8 \cdot 10^6)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (119 \cdot 60)^2} = 6,77 \cdot 10^{22} \text{ kg}$$

La velocidad orbital la tenemos en 5:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,77 \cdot 10^{22}}{1,8 \cdot 10^6}} = 1583,88 \text{ m/s}$$

b) No se vería afectada puesto que la velocidad orbital no depende de la masa de la nave.

18. *a*) Se quiere lanzar al espacio un objeto de 500 kg y para ello se utiliza un dispositivo que le imprime la velocidad necesaria. Se desprecia la fricción con el aire. Explique los cambios energéticos del objeto desde su lanzamiento hasta que escapa de la gravedad terrestre y calcule su energía mecánica a una altura h. *b*) ¿Qué velocidad inicial sería necesaria para que un objeto orbite a una altura de 30 km? Datos: $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$, $R_T = 6400$ km y $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg.

Solución. Primero el dispositivo realiza un trabajo no conservativo para que el objeto pase del reposo a la velocidad de lanzamiento. Una vez el objeto abandone el dispositivo de lanzamiento solo actúa el peso sobre él, por lo que se conserva su energía mecánica y conforme asciende su energía cinética se transforma en energía potencial. El balance de energía es:

$$E_{\text{m1}} = E_{\text{m2}}$$

$$E_{\text{c1}} + E_{\text{p1}} = E_{\text{c2}} + E_{\text{p2}}$$

Como se quiere enviar el objeto fuera de la influencia de la gravedad terrestre, tenemos que enviarlo a una distancia infinita y allí su energía potencial final vale cero, como se ve en la figura 4. Como no nos dicen nada consideramos la menor energía para llegar al infinito y eso implica que llegue justamente con energía cinética cero, por lo tanto:

$$E_{\text{c1}} + E_{\text{p1}} = 0$$

por lo que la energía mecánica vale siempre cero así que a una altura h vale cero. *b*) La energía mecánica en el lanzamiento es igual que en la órbita:

$$\frac{1}{2} m v_{\text{lanz}}^2 - \frac{GMm}{r_{\text{T}}} = \frac{1}{2} m v_{\text{orb}}^2 - \frac{GMm}{r_{\text{orb}}} \tag{6}$$

La fuerza gravitatoria proporciona la fuerza centrípeta en la órbita:

$$\frac{GMm}{r_{\mathrm{orb}}^2} = \frac{mv_{\mathrm{orb}}^2}{r_{\mathrm{orb}}}$$

simplificamos la distancia y dividimos entre dos:

$$\frac{1}{2}\frac{GMm}{r_{\mathrm{orb}}} = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{orb}}^2$$

y sustituimos en la ecuación 6:

$$\frac{1}{2}mv_{\mathrm{lanz}}^2 - \frac{GMm}{r_{\mathrm{T}}} = \frac{1}{2}\frac{GMm}{r_{\mathrm{orb}}} - \frac{GMm}{r_{\mathrm{orb}}}$$

$$\frac{1}{2}mv_{\mathrm{lanz}}^2 - \frac{GMm}{r_{\mathrm{T}}} = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{r_{\mathrm{orb}}}$$

$$v_{\mathrm{lanz}}^2 = -\frac{GM}{r_{\mathrm{orb}}} + \frac{2GM}{r_{\mathrm{T}}}$$

$$v_{\mathrm{lanz}} = \sqrt{GM\left(\frac{-1}{r_{\mathrm{orb}}} + \frac{2}{r_{\mathrm{T}}}\right)}$$

$$v_{\mathrm{lanz}} = \sqrt{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 6\cdot 10^{24}\left(\frac{-1}{6,43\cdot 10^{6}} + \frac{2}{6,4\cdot 10^{6}}\right)} = 7926,10\ \mathrm{m/s}$$

que equivalen a 28533 km/h.

19. Un satélite artificial describe una órbita en torno a la Tierra con un periodo de revolución igual al terrestre. *a*) Explique cuántas órbitas son posibles y calcule su radio. *b*) Determine la relación entre la velocidad de escape en un punto de la superficie terrestre y la velocidad orbital del satélite.

    Solución. *a*) El radio lo hemos calculado en la ecuación 4 y a esa distancia hay infinitas órbitas porque hay infinitos planos puesto que no nos piden que sea geoestacionaria sino que solo tenga el mismo periodo de revolución. *b*) La velocidad de escape desde la superficie terrestre es:

$$\frac{1}{2}mv_{\mathrm{esc}}^2 - \frac{GMm}{r_{\mathrm{T}}} = 0$$

$$v_{\mathrm{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{r_{\mathrm{T}}}} \tag{7}$$

y su valor son 11200 m/s. Es importante tener este dato como referencia porque si enviamos un objeto a una órbita o a un punto que esté dentro de la atracción terrestre su velocidad de lanzamiento nunca puede ser mayor que la velocidad de escape. Por otro la velocidad orbital de un satélite es:

$$\frac{GMm}{r_{\mathrm{orb}}^2} = \frac{mv_{\mathrm{orb}}^2}{r_{\mathrm{orb}}}$$

$$v_{\text{orb}} = \sqrt{\frac{GM}{r_{\text{orb}}}} \tag{8}$$

y la relación entre ambas:

$$\frac{v_{\text{esc}}}{v_{\text{orb}}} = \sqrt{\frac{2r_{\text{orb}}}{r_{\text{T}}}}$$

20. Si con un cañón lo suficientemente potente se lanzara desde la Tierra hacia la Luna un proyectil, *a*) ¿en qué punto de su trayectoria hacia la Luna la aceleración del proyectil sería nula?, *b*) ¿qué velocidad mínima inicial debería poseer para llegar a ese punto? ¿Cómo se movería a partir de esa posición?
Datos: G, M_{T}, $M_{\text{L}} = 7,0 \cdot 10^{22}$ kg y $d_{\text{T-L}} = 3,8 \cdot 10^{8}$ m.

Solución. *a*) En la figura 7 se muestra el punto donde se anulan las fuerzas gravitatorias de la Tierra y la Luna. En ese punto por tanto la aceleración es cero.

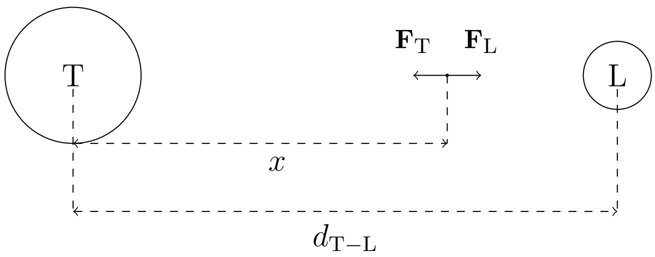

Figura 7:

Si una nave viaja de la Tierra a la Luna ira perdiendo velocidad hasta llegar a ese punto y posteriormente ganará velocidad al descender hacia la Luna. Para calcular el punto igualamos las fuerzas:

$$\frac{GM_{\text{T}}m}{x^2} = \frac{GM_{\text{L}}m}{(d_{\text{T-L}} - x)^2}$$

$$\frac{M_{\text{T}}}{x^2} = \frac{M_{\text{L}}}{(d_{\text{T-L}} - x)^2}$$

$$\frac{M_{\text{L}}}{M_{\text{T}}}x^2 = d_{\text{T-L}}^2 + x^2 - 2d_{\text{T-L}}x$$

$$\frac{M_{\text{L}}}{M_{\text{T}}}x^2 - x^2 + 2d_{\text{T-L}}x - d_{\text{T-L}}^2 = 0$$

$$\left(\frac{M_{\text{L}}}{M_{\text{T}}} - 1\right)x^2 + 2d_{\text{T-L}}x - d_{\text{T-L}}^2 = 0$$

$$x = \frac{-2d_{\text{T-L}} \pm \sqrt{4d_{\text{T-L}}^2 + 4d_{\text{T-L}}^2\left(\frac{M_{\text{L}}}{M_{\text{T}}} - 1\right)}}{2\left(\frac{M_{\text{L}}}{M_{\text{T}}} - 1\right)} \tag{9}$$

sustituyendo y operando:

$$x = \frac{-7,6 \cdot 10^{8} \pm \sqrt{5,776 \cdot 10^{17} - 5,708\,613\,33 \cdot 10^{17}}}{-1,976\,666}$$

$$x = \frac{-7,6 \cdot 10^8 \pm 82\,089\,585,21}{-1,976\,666}$$

$$x_1 = \frac{-677\,910\,414}{-1,976\,666} = 342\,956\,376 \text{ m}$$

$$x_2 = \frac{-842\,089\,585}{-1,976\,666} = 426\,015\,110 \text{ m}$$

como los datos solo tienen dos cifras significativas dejamos los resultados con dos cifras:

$$x_1 = 3,4 \cdot 10^8 \text{ m}$$

$$x_2 = 4,3 \cdot 10^8 \text{ m}$$

La segunda solución no tiene sentido porque no está entre la Tierra y la Luna así que la distancia pedida es $3,4 \cdot 10^6$ m. Resulta interesante seguir simplificando 9 y ver que se llega a:

$$x = \frac{-d_{\text{T}-\text{L}} \pm d_{\text{T}-\text{L}}\sqrt{\frac{M_\text{L}}{M_\text{T}}}}{\frac{M_\text{L}}{M_\text{T}} - 1}$$

$$x = \frac{-3,8 \cdot 10^8 \pm 41\,044\,691,09}{-0,988\,333\,3}$$

$$x_1 = \frac{-338\,955\,308}{-0,988\,333\,3} = 342\,956\,466,9 \text{ m}$$

$$x_2 = \frac{-421\,044\,691}{-0,988\,333\,3} = 426\,014\,864 \text{ m}$$

pero como vemos, no ahorramos trabajo. *b*) Planteamos la conservación de la energía entre el punto de lanzamiento y el punto en el que la aceleración es nula:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_\text{T}m}{r_\text{T}} - \frac{GM_\text{L}m}{d_{\text{T}-\text{L}} - r_\text{T}} = -\frac{GM_\text{T}m}{x} - \frac{GM_\text{L}m}{d_{\text{T}-\text{L}} - x}$$

si nos parece extraño incluir el término de energía potencial en la superficie terrestre entre el objeto y la Luna conviene recordar que las mareas se deben a la atracción lunar. Como nos preguntan la velocidad mínima para llegar consideramos que llega justo con velocidad cero. Despejamos la velocidad y la calculamos:

$$v^2 = 2G\left(-\frac{M_\text{T}}{x} - \frac{M_\text{L}}{d_{\text{T}-\text{L}} - x} + \frac{M_\text{T}}{r_\text{T}} + \frac{M_\text{L}}{d_{\text{T}-\text{L}} - r_\text{T}}\right)$$

$$v = 11\,067,96 \approx 11000 \text{ m/s}$$

dejando el resultado con solo dos cifras significativas. Una vez el cuerpo llegue a esa posición no sabremos hacia dónde irá, puesto que se encuentra en un equilibrio inestable, puede caer hacia la Tierra o hacia la Luna. Para asegurarnos que caiga hacia la Luna deberíamos de enviarlo con un poco más de velocidad.

21. Se suele decir que la energía potencial gravitatoria de un cuerpo de masa m situado a una altura h viene dada por $E_p = mgh$, *a*) ¿es correcta esta afirmación? ¿por qué? *b*) ¿En qué condiciones es válida dicha fórmula?

    Solución. *a*) Sí, es correcta, pero solo es válida si h no es muy grande comparada con el radio terrestre puesto que se deduce a partir de la fórmula sin aproximación $E_\mathrm{p} = -\frac{GMm}{r}$ considerando esa condición. Además si h fuera grande, el valor de g ya no sería constante y sin embargo en la fórmula permanece constante introduciendo por tanto otro error. Otra forma de contestar a esta pregunta es deducir la ecuación mgh. *b*) Podemos usarla en ejercicios de planos inclinados y pequeñas alturas pero no en el estudio de órbitas y movimientos espaciales.

22. *a*) ¿Puede ser negativa la energía cinética de una partícula? ¿y la energía potencial? En caso afirmativo explique el significado físico. *b*) ¿Se cumple siempre que el aumento de energía cinética de una partícula es igual a la disminución de su energía potencial? Justifique la respuesta.

    Solución. *a*) La energía cinética no puede ser negativa porque la masa es positiva y la velocidad está elevada al cuadrado sin embargo la energía potencial sí puede ser negativa, todo depende de dónde elijamos el cero de energía potencial. De cualquier modo esta elección no tiene ninguna relevancia porque lo que tiene sentido físico es la variación de la energía potencial. *b*) Si solo actúan fuerzas conservativas sí se cumple pero si actúan fuerzas no conservativas la disminución de energía potencial se transformará una parte en energía cinética y otra se disipará como un trabajo no conservativo. Y si el movimiento es horizontal y actúa una fuerza no conservativa en el sentido del movimiento la partícula aumentará su energía cinética solo debido al trabajo no conservativo y su energía potencial permanecerá constante.

23. La masa de la Luna es 0,01 veces la de la Tierra y su radio es 0,25 veces el radio terrestre. Un cuerpo cuyo peso en la Tierra es de 800 N cae desde una altura de 50 m sobre la superficie lunar. *a*) Determine la masa del cuerpo y su peso en la Luna. *b*) Realice el balance de energía en el movimiento de caída y calcule la velocidad con que el cuerpo llega a la superficie. Dato: $g_\mathrm{T} = 10$ m s^{-2}.

    Solución. *a*) Obtenemos la masa (que es invariable):

$$m = \frac{P_\mathrm{T}}{g_\mathrm{T}} = \frac{800}{10} = 80 \text{ kg}$$

Obtenemos g_L:

$$g_\mathrm{L} = \frac{GM_\mathrm{L}}{r_\mathrm{L}^2} = \frac{G \cdot 0,01 M_\mathrm{T}}{\left(\frac{r_\mathrm{T}}{4}\right)^2} = 0,16\frac{GM_\mathrm{T}}{r_\mathrm{T}^2} = 0,16 g_\mathrm{T} = 0,16 \cdot 10 = 1,6 \text{ m/s}^2$$

y el peso es $P_\mathrm{L} = 80 \cdot 1,6 = 128$ N. *b*) Como solo actúa el peso se conserva la energía mecánica y la energía potencial se transforma en energía cinética conforme desciende llegando con una velocidad:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg_\mathrm{L}h$$

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 1,6 \cdot 50} = 12,65 \text{ m/s}$$

24. Un satélite describe una órbita circular en torno a la Tierra de radio doble que el terrestre. *a*) Determine la velocidad del satélite y su periodo de rotación. *b*) Explique cómo variarían las magnitudes determinadas en *a*) en los siguientes casos: *i*) si la masa del satélite fuese doble; *ii*) si orbitase en torno a un planeta de masa la mitad y radio igual al de la Tierra. Datos: G, M_{T} y R_{T}.

    Solución. *a*) Usando la ecuación 8 obtenemos:

$$v_{\mathrm{orb}} = \sqrt{\frac{GM_{\mathrm{T}}}{2r_{\mathrm{T}}}} = 5591 \text{ m/s}$$

    y usando 2:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(2r_T)^3}{GM_{\mathrm{T}}}} = 14383 \text{ s} = 4 \text{ horas}$$

    b) *i*) Como vemos en las fórmulas la masa del satélite no influye en ellas por lo que no se modificarán. *ii*) El radio del planeta no cambia y aunque cambiara no influiría puesto que en las fórmulas figura el radio de la órbita y no el del planeta. Para ver el efecto de la masa llamemos a las nuevas magnitudes con prima:

$$v'_{\mathrm{orb}} = \sqrt{\frac{GM'}{r_{\mathrm{orb}}}} = \sqrt{\frac{G\frac{M_{\mathrm{T}}}{2}}{r_{\mathrm{orb}}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{GM_{\mathrm{T}}}{r_{\mathrm{orb}}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}v_{\mathrm{orb}}$$

    por lo que la velocidad disminuye con el factor 0,707 y se reduce a 3953 m/s. Y para el periodo:

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{r_{orb}^3}{GM'}} = 2\pi\sqrt{\frac{r_{orb}^3}{G\frac{M_{\mathrm{T}}}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2r_{orb}^3}{GM_{\mathrm{T}}}} = 2\pi\sqrt{2}\sqrt{\frac{r_{orb}^3}{GM_{\mathrm{T}}}} = \sqrt{2}T$$

    y el periodo aumenta en el factor 1,4142 por lo que cambia a 5,65 horas.

25. El satélite de Júpiter llamado Ío orbita a una distancia de 422 000 km, con un periodo de revolución de 1,77 días. Con estos datos, calcula a qué distancia se encuentra Europa, otra de sus lunas, si su periodo es de 3,55 días.

    Solución. Podemos resolverlo fácilmente aplicando la tercera ley de Kepler, que nos dice que para cualquier planeta orbitando alrededor del Sol la relación entre el periodo orbital al cuadrado y la distancia al Sol al cubo es constante:

$$\frac{T^2}{R^3} = k$$

    También se cumple para este caso, pues los satélites respecto a los planetas se comportan como los planetas respecto al Sol. Resulta más útil escribir la ley así:

$$\frac{T_{\text{Ío}}^2}{R_{\text{Ío}}^3} = \frac{T_{\mathrm{Eu}}^2}{R_{\mathrm{Eu}}^3}$$

Despejamos y como la ecuación no tiene ninguna constante podemos introducir los valores en cualquier unidad, solo tenemos que tener cuidado de no mezclar unidades:

$$R_{\mathrm{Eu}} = \sqrt[3]{\frac{T_{\mathrm{Eu}}^2 \cdot R_{\mathrm{Ío}}^3}{T_{\mathrm{Ío}}^2}} = \frac{3,55^2 \cdot 422\,000^3}{1,77^2} = 671\,000 \text{ km}$$

Expresamos el resultado con solo tres cifras significativas porque los datos solo tienen tres cifras significativas.

26. Dos partículas de masas $m_1 = 2$ kg y $m_2 = 5$ kg están situadas en los puntos $\mathrm{P}_1(0,2)$ y $\mathrm{P}_2(1,0)$ metros, respectivamente. *a*) Dibuje el campo gravitatorio producido por cada una de las masas en el punto O(0,0) y en el punto P$(1,2)$ metros y calcule el campo total en el punto P. *b*) Calcule el trabajo necesario para desplazar una partícula de 0,1 kg desde el punto 0 al P.

Solución. *a*) En la figura 8 están dibujados los vectores y en el punto O sabemos

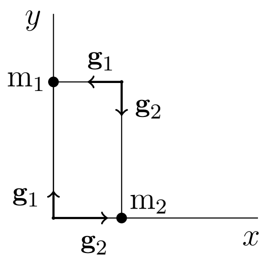

Figura 8:

con seguridad que $\mathbf{g}_1$ tiene menor módulo que $\mathbf{g}_2$ porque $m_1 < m_2$ y además está más lejos pero en el punto P no sabemos, sin calcularlo, qué vector es mayor. Calculamos el campo creado por cada masa en el punto P, primero calculamos el módulo

$$g_1 = \frac{Gm_1}{r_1^2} = \frac{G2}{1^2} \qquad g_2 = \frac{G5}{2^2}$$

y después calculamos el vector

$$g_1 = -G2\mathbf{i} \qquad g_2 = -\frac{G5}{4}\mathbf{j}$$

El principio de superposición nos permite calcular el campo total como la suma vectorial de $\mathbf{g}_1$ y $\mathbf{g}_2$:

$$\mathbf{g}_{\mathrm{P}} = -G2\mathbf{i} - \frac{G5}{4}\mathbf{j}$$

b) Usamos la definición de energía potencial:

$$W_{\mathrm{c}} = -\Delta E_{\mathrm{p}}$$

recordemos que el potencial es:

$$V = -\frac{GM}{r} \quad y \quad V = \frac{E_{\mathrm{p}}}{m}$$

y de esta manera ahorramos cálculos:

$$W_c = -m\Delta V = -m(V_P - V_O)$$

Calculamos el potencial en el punto P como la suma escalar del potencial creado por cada masa

$$V_P = V_{1P} + V_{2P} = -\frac{G2}{1} - \frac{G5}{2} = -\frac{G9}{2}$$

e igual en el punto O

$$V_O = V_{1O} + V_{2O} = -\frac{G2}{2} - \frac{G5}{1} = -G6$$

y obtenemos el resultado pedido

$$W_c = -0,1(-\frac{G9}{2} + G6) = -0,1 \cdot \frac{G3}{2} = -0,1 \cdot \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 3}{2} = -1,0005 \cdot 10^{-11} \text{ J}$$

Como el trabajo realizado por el campo es negativo significa que el movimiento no es espontáneo (recuerda que un objeto en caída libre realiza un movimiento espontáneo y el trabajo realizado por el campo es positivo puesto que la fuerza y el desplazamiento tienen igual sentido) por lo tanto debemos realizar un trabajo no conservativo en contra del campo para que la partícula se desplace del punto O al P.

27. Un cuerpo, inicialmente en reposo a una altura de 150 km sobre la superficie terrestre, se deja caer libremente. *a*) Explique cualitativamente cómo varían las energías cinética, potencial y mecánica del cuerpo durante el descenso, si se supone nula la resistencia del aire, y determine la velocidad del cuerpo cuando llega a la superficie terrestre. *b*) Si, en lugar de dejar caer el cuerpo, lo lanzamos verticalmente hacia arriba desde la posición inicial, ¿cuál sería su velocidad de escape? Datos: G, M_T y R_T.

Solución. *a*) Como solo actúa la fuerza gravitatoria, que es conservativa, se conserva la energía mecánica y la energía potencial inicial se va transformando en energía cinética, de manera que

$$-\frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r_T}$$

$$v^2 = -\frac{2GM}{r} + \frac{2GM}{r_T}$$

$$v = \sqrt{2GM\left(\frac{-1}{r} + \frac{1}{r_T}\right)}$$

$$v = \sqrt{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}\left(\frac{-1}{6,55 \cdot 10^6} + \frac{1}{6,4 \cdot 10^6}\right)} = 1692 \text{ m/s}$$

En la realidad, debido al rozamiento con el aire, el cuerpo o se desintegra por el calor o alcanza una velocidad límite que depende de su forma así que nunca alcanzará la velocidad calculada. *b*) Escribimos la energía mecánica a 150 km de la superficie terrestre (punto inicial) y fuera de la influencia de la Tierra (punto final):

$$\frac{1}{2}mv_{\text{esc}}^2 - \frac{GMm}{r} = 0$$

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{6,55 \cdot 10^6}} = 11054 \text{ m/s}$$

28. *a*) ¿Qué trabajo se realiza al sostener un cuerpo durante un tiempo t. *b*) ¿Qué trabajo realiza la fuerza peso de un cuerpo si éste se desplaza una distancia d por una superficie horizontal? Razone las respuestas.

    Solución. *a*) Ninguno porque no hay desplazamiento. *b*) Ninguno porque el peso y el desplazamiento son perpendiculares.

INTERACCIÓN ELECTROSTÁTICA

1. Una carga puntual Q crea un campo electrostático. Al trasladar una carga q desde un punto A al infinito, el campo realiza un trabajo de 5 J. Si se traslada desde el infinito hasta otro punto C, el campo realiza un trabajo es de -10 J. *a*) ¿Qué trabajo realiza el campo al llevar la carga desde el punto C al A? ¿En qué propiedad del campo electrostático se basa la respuesta? *b*) Si $q = -2$ C, ¿cuánto vale el potencial en los puntos A y C, qué punto está más próximo a la carga Q y cuál es el signo de Q? Justifica las respuestas.

   Solución. *a*) La figura 9 representa el movimiento. Con el primer dato tenemos:

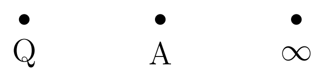

Figura 9:

$$W_{\text{A}\infty} = 5 \text{ J}$$

$$W_{\text{A}\infty} = -(E_{\text{p}\infty} - E_{\text{pA}})$$

y como la energía potencial en el infinito es cero:

$$E_{\text{pA}} = 5 \text{ J}$$

Con el segundo dato:

$$W_{\infty\text{C}} = -10 \text{ J}$$

$$W_{\infty\text{C}} = -(E_{\text{pC}} - E_{\text{p}\infty})$$

$$E_{\text{pC}} = 10 \text{ J}$$

así que vemos que el punto C está a la izquierda de A. El trabajo pedido es:

$$W_{\text{CA}} = -(E_{\text{pA}} - E_{\text{pC}}) = -(5 - 10) = 5 \text{ J}$$

y el movimiento es espontáneo porque va a favor del campo. La propiedad en que nos basamos es que el campo es conservativo y por eso solo importa el punto inicial y final y no los intermedios. b) El potencial es la energía potencial dividida entre una de las cargas:

$$V_{\mathrm{A}} = \frac{E_{\mathrm{p}}A}{q} = \frac{5}{-2} = -2,5 \text{ J/C}$$

$$V_{\mathrm{C}} = \frac{10}{-2} = -5 \text{ J/C}$$

como el potencial creado por Q es negativo significa que Q es negativa y viendo su gráfica (figura 10) vemos que el punto C se encuentra más próximo a la carga

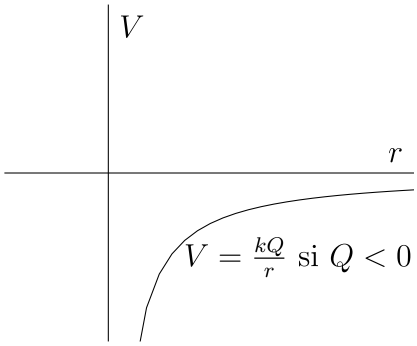

Figura 10: Potencial si la carga es negativa

Q porque tiene un potencial menor que el punto A.

2. a) Determine razonadamente en qué punto (o puntos) del plano x–y es nula la intensidad del campo eléctrico creado por dos cargas idénticas $q_1 = q_2 = -4 \cdot 10^{-6}$ C, situadas en los puntos (−2,0) y (2,0) m , respectivamente. b) ¿Es también nulo el potencial en ese punto (o puntos)? Calcule, en cualquier caso, su valor. Dato: $k_e = 9 \cdot 10^9$ N m^2 C^{-2}.

Solución. a) En la figura 11 se representa la situación en la que el campo total es nulo (origen de coordenadas). Como vemos, cada carga genera un campo y por el principio de superposición el campo total es su suma vectorial. En cualquier otro punto el campo total no se anula. b) El potencial no se puede anular en ningún

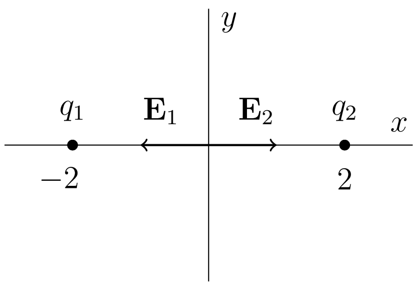

Figura 11:

punto puesto que al ser una magnitud escalar al sumar los valores negativos nos saldrá un potencial total negativo. Su valor es:

$$V_{\text{total}} = V_1 + V_2 = 2V_1 = \frac{2kq_1}{2} = \frac{2 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot (-4 \cdot 10^{-6})}{2} = -36000 \text{ V}$$

3. Dos cargas $q_1 = 2 \cdot 10^{-6}$ C y $q_2 = -4 \cdot 10^{-6}$ C están fijas en los puntos $P_1(0,2)$ m y $P_2(1,0)$ m, respectivamente. *a*) Dibuje el campo electrostático producido por cada una de las cargas en el punto O(0,0) m y en el punto P(1,2) m y calcule el campo total en el punto P. *b*) Calcule el trabajo necesario para desplazar una carga $q = -3 \cdot 10^{-6}$ C desde el punto O hasta el punto P y explique el significado del signo de dicho trabajo. Dato: $k = 9 \cdot 10^9$ N m^2 C^{-2}.

Solución. *a*) En la figura 12 están dibujados los vectores y en el punto O sabemos

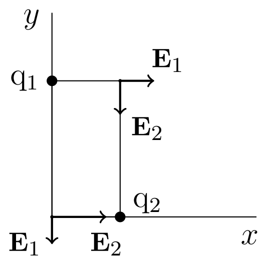

Figura 12:

con seguridad que $\mathbf{E}_1$ tiene menor módulo que $\mathbf{E}_2$ porque $|q_1| < |q_2|$ y además está más lejos pero en el punto P no sabemos, sin calcularlo, qué vector es mayor. Calculamos el campo creado por cada carga en el punto P, primero calculamos el módulo

$$E_1 = \frac{kq_1}{r_1^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{1^2} = 18 \cdot 10^3 \text{ N/C} \quad E_2 = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-6}}{2^2} = 9 \cdot 10^3 \text{ N/C}$$

y después construimos el vector

$$\mathbf{E}_1 = 18 \cdot 10^3 \mathbf{i} \text{ N/C} \qquad \mathbf{E}_2 = -9 \cdot 10^3 \mathbf{j} \text{ N/C}$$

El principio de superposición nos permite calcular el campo total en el punto P como la suma vectorial de $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$:

$$\mathbf{E}_\text{P} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = 18 \cdot 10^3 \mathbf{i} - 9 \cdot 10^3 \mathbf{j} \text{ N/C}$$

b) Usamos la definición de energía potencial:

$$W_\text{c} = -\Delta E_\text{p}$$

recordemos que el potencial es:

$$V = \frac{kq}{r} \quad y \quad V = \frac{E_\text{p}}{q}$$

y de esta manera ahorramos cálculos:

$$W_\text{c} = -q\Delta V = -q(V_\text{P} - V_\text{O})$$

Calculamos el potencial en el punto P como la suma escalar del potencial creado por cada carga

$$V_\text{P} = V_{1\text{P}} + V_{2\text{P}} = \frac{k \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{1} + \frac{k \cdot (-4) \cdot 10^{-6}}{2} = 0 \text{ V}$$

e igual en el punto O

$$V_{\mathrm{O}} = V_{1\mathrm{O}} + V_{2\mathrm{O}} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{2} + \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (-4) \cdot 10^{-6}}{1} = -27000 \text{ V}$$

y obtenemos el resultado pedido

$$W_{\mathrm{c}} = -(-3 \cdot 10^{-6}) \cdot (0 + 27000) = 0,081 \text{ J}$$

Como el trabajo realizado por el campo es positivo significa que el movimiento es espontáneo (recuerda que un objeto en caída libre realiza un movimiento espontáneo y el trabajo realizado por el campo es positivo puesto que la fuerza y el desplazamiento tienen igual sentido).

4. Una partícula de carga $6 \cdot 10^{-6}$ C se encuentra en reposo en el punto (0,0). Se aplica un campo uniforme de 500 $\mathrm{N} \cdot \mathrm{C}^{-1}$, dirigido en el sentido positivo del eje OY. *a*) Describa la trayectoria seguida por la partícula hasta el instante en que se encuentra en el punto A, situado a 2 m del origen. ¿Aumenta o disminuye la energía potencial de la partícula en dicho desplazamiento? ¿En qué se convierte dicha variación de energía? *b*) Calcule el trabajo realizado por el campo en el desplazamiento de la partícula y la diferencia de potencial entre el origen y el punto A.

   Solución. *a*) Las líneas de fuerza del campo creado por una carga puntual se representan en la figura 13. Vemos que cuanto más nos alejamos de la carga más

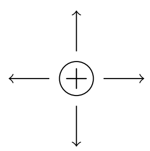

Figura 13:

separan las líneas. Por tanto si el campo es constante, lo representamos con las líneas de fuerza igualmente espaciadas, tal y como se muestra en la figura 14. La

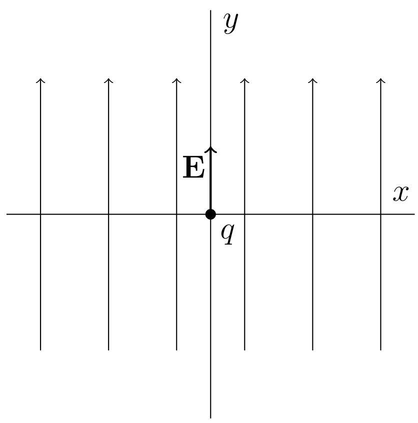

Figura 14:

partícula experimenta una fuerza constante:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = 6 \cdot 10^{-6} \cdot 500\mathbf{j} = 0,003\mathbf{j}\ \mathrm{N}$$

por lo que describe un MRUA en el que la partícula gana velocidad. Como el campo eléctrico es conservativo, si gana energía cinética significa que pierde energía potencial por lo que esta disminuye y la energía cinética aumenta. *b*) El trabajo realizado por el campo es:

$$W_\mathrm{c} = F\Delta r \cos 0° = 0,003 \cdot 2 = 0,006\ \mathrm{J}$$

y la diferencia de potencial es:

$$W_\mathrm{c} = -q\Delta V \ \Rightarrow\ \Delta V = \frac{W_\mathrm{c}}{-q} = \frac{0,006}{-6 \cdot 10^{-6}} = -1000\ \mathrm{V}$$

5. *a*) Razone si la energía potencial electrostática de una carga q aumenta o disminuye al pasar del punto A al B, siendo el potencial en A mayor que en B. *b*) El punto A está más alejado que el B de la carga Q que crea el campo. Razone si la carga Q es positiva o negativa.

   Solución. *a*) Como el potencial es mayor en A se cumple que:

$$V_\mathrm{B} - V_\mathrm{A} < 0$$

   La variación de la energía potencial es:

$$E_\mathrm{pB} - E_\mathrm{pA} = q(V_\mathrm{B} - V_\mathrm{A})$$

   y vemos que si la carga q es positiva la energía potencial disminuye y si es negativa aumenta. *b*) La figura 15) muestra la gráfica si la carga Q es positiva y vemos que el punto A está más cerca que el punto B, por lo que Q tendrá que ser negativa (figura 16).

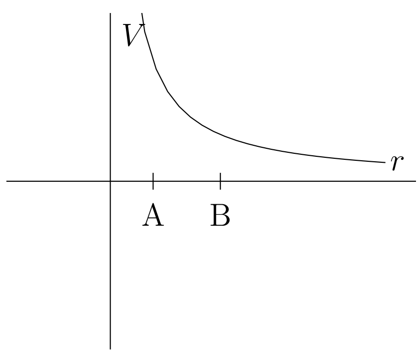

Figura 15:

6. Dos cargas puntuales, $q_1 = 3 \cdot 10^{-6}$ C y $q_2 = 12 \cdot 10^{-6}$ C, están situadas, respectivamente, en los puntos A y B de una recta horizontal, separados 20 cm. *a*) Razone cómo varía el campo electrostático entre los puntos A y B y represente gráficamente dicha variación en función de la distancia al punto A. *b*) ¿Existe

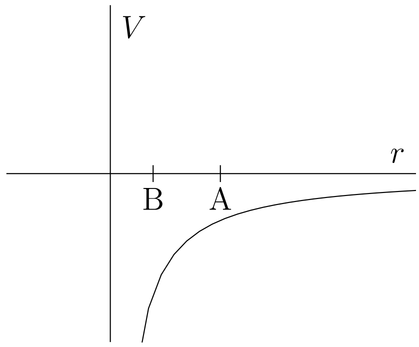

Figura 16:

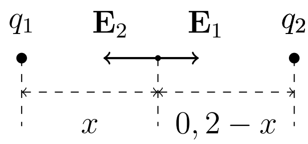

Figura 17:

algún punto de la recta que contiene a las cargas en el que el campo sea cero? En caso afirmativo, calcule su posición. Dato: $k = 9 \cdot 10^9$ N m^2 C^{-2}.

Solución. Resolvemos primero el apartado b). Como las partículas son positivas el campo que crean se aleja de ellas (figura 17) y el punto en el que se anulen los tendrán igual módulo:

$$E_1 = E_2$$

$$\frac{kq_1}{x^2} = \frac{kq_2}{(0,2-x)^2}$$

$$\frac{k \cdot 3 \cdot 10^{-6}}{x^2} = \frac{k \cdot 12 \cdot 10^{-6}}{(0,2-x)^2}$$

simplificamos:

$$\frac{1}{x^2} = \frac{4}{(0,2-x)^2}$$

y resolvemos:

$$0,2^2 + x^2 - 0,4x = 4x^2$$

$$3x^2 + 0,4x - 0,04 = 0$$

$$x = \frac{-0,4 \pm \sqrt{0,4^2 + 4 \cdot 3 \cdot 0,04}}{2 \cdot 6} = \frac{-0,4 \pm 0,8}{6}$$

$$x_1 = 0,06 \text{ m} \qquad x_2 = -0,2 \text{ m}$$

Por tanto el campo se anula a 0,06 metros de la carga q_1, ya que que la solución negativa no tiene sentido físico puesto que una distancia no puede ser negativa. a) A la izquierda del punto en que se anula el campo, el campo tiene sentido hacia la derecha y a la derecha sentido hacia la izquierda. Gráficamente podemos considerar que el sentido hacia la derecha es positivo (figura 18) y hacia la izquierda negativo (figura 19) donde además dibujamos el eje horizontal creciente hacia la

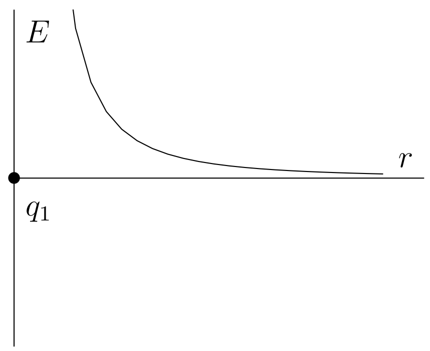

Figura 18:

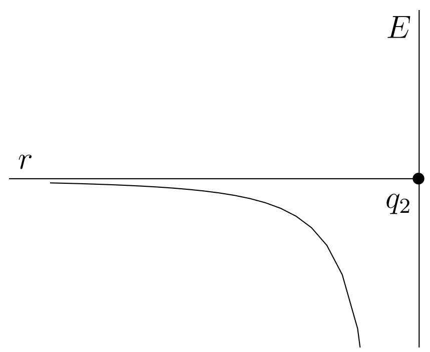

Figura 19:

izquierda. Uniendo ambas gráficas y teniendo en cuenta que el campo se anula en el punto 0,06 m obtenemos la figura 20.

7. Dos cargas puntuales iguales, de $-1,2 \cdot 10^{-6}$ C cada una, están situadas en los puntos A(0,8) m y B(6,0) m. Una tercera carga, de $-1,5 \cdot 10^{-6}$ C, se sitúa en el punto P(3,4) m. *a*) Represente en un esquema las fuerzas que se ejercen entre las cargas y calcule la resultante sobre la tercera carga. *b*) Calcule la energía potencial de dicha carga.

   Solución. *a*) Los puntos se encuentran en la misma recta porque al dividir entre dos las coordenadas de los puntos A y B obtenemos las coordenadas del punto P. Las fuerzas surgen entre pares de cargas. Entre las cargas situadas en los puntos A y B surge la fuerza de módulo F_1 y entre las cargas situadas en los puntos A y P y los puntos B y P surge la fuerza de módulo F_2 y como todas las cargas son negativas todas las interacciones son repulsivas y las mostramos en la figura 21. y la resultante sobre la tercera carga al aplicar el principio de superposición, tal y como vemos en la figura 21, es nula. *b*) Por el principio de superposición podemos expresar la energía potencial como la suma de las energías potenciales entre las cargas situadas en A y P y en B y P y como tienen igual valor:

$$E_{\mathrm{p}} = 2E_{\mathrm{pAP}} = 2 \cdot \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (-1,2 \cdot 10^{-6}) \cdot (-1,5 \cdot 10^{-6})}{5} = 6,48 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

   donde la distancia es $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

8. Dos cargas puntuales iguales, de $-5 \cdot 10^{-8}$ C, están fijas en los puntos (0,0) m y

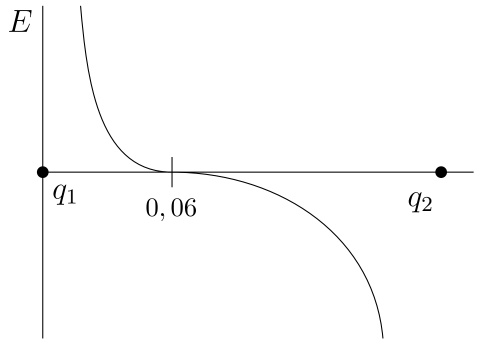

Figura 20:

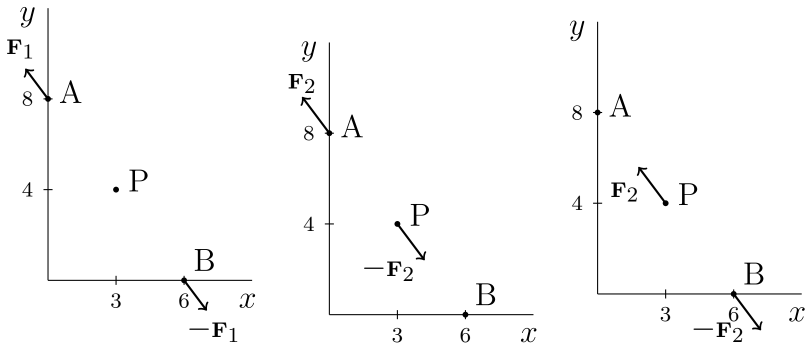

Figura 21:

(5,0) m. Calcule: *a*) El campo eléctrico (módulo, dirección y sentido) en el punto (10,0) m. *b*) La velocidad con que llega al punto (8,0) m una partícula de carga $8 \cdot 10^{-9}$ C y masa $5 \cdot 10^{-3}$ g que se abandona libremente en el punto (10,0) m.

Solución. *a*) Vemos en la figura 22 el campo creado por cada carga. El campo

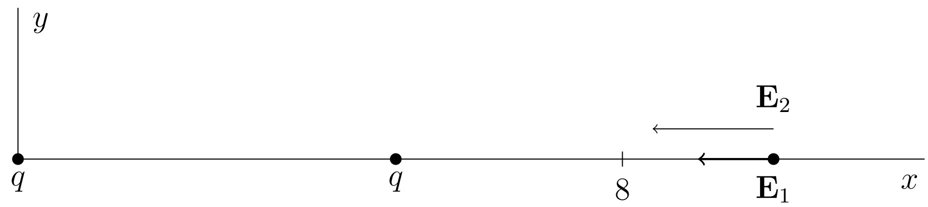

Figura 22:

total, por el ppo. de superposición, es en módulo:

$$E = E_1 + E_2 = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-8}}{10^2} + \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-8}}{5^2} = 22,5 \text{ N/C}$$

tiene la dirección del eje X y su sentido decreciente. *b*) Como la fuerza no es constante no se trata de un MRUA por lo que no podemos resolverlo por cinemática. Pero podemos resolverlo fácilmente por energía porque como el campo eléctrico es conservativo se conserva la energía mecánica:

$$E_{c2} + E_{p2} = 0 + E_{p1}$$

$$E_{c2} = E_{p1} - E_{p2}$$

$$E_{c2} = \frac{kqq'}{10} + \frac{kqq'}{5} - \left(\frac{kqq'}{8} + \frac{kqq'}{3}\right)$$

$$E_{c2} = 9 \cdot 10^9 \cdot (-5 \cdot 10^{-8}) \cdot 8 \cdot 10^{-9} \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} - \frac{1}{3}\right) = 5,7 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{J}$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 5,7 \cdot 10^{-7}}{5 \cdot 10^{-6}}} = 0,48\ \mathrm{m/s}$$

9. En una región del espacio el potencial electrostático aumenta en el sentido positivo del eje z y no cambia en las direcciones de los otros dos ejes. *a*) Dibuje en un esquema las líneas del campo electrostático y las superficies equipotenciales. *b*) ¿En qué dirección y sentido se moverá un electrón, inicialmente en reposo?

   Solución. Al representar en la figura 23, para una carga puntual, la gráfica de

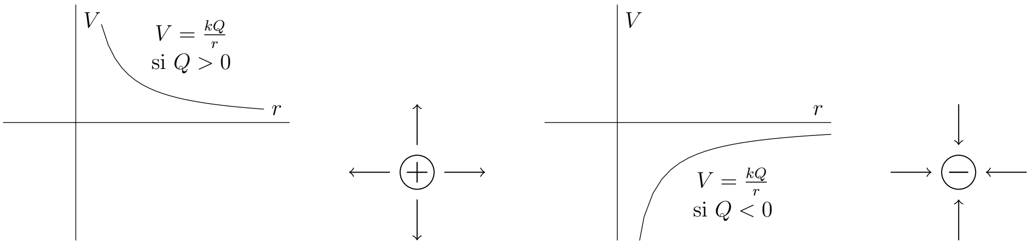

Figura 23:

potencial y las líneas de fuerza, vemos que estas apuntan hacia donde el potencial disminuye. Además sabemos que la superficies de potencial son cortezas esféricas. Sin embargo en este problema el campo es constante en el plano horizontal por lo que las superficies equipotenciales serán planos horizontales y las líneas de fuerza serán líneas verticales con el sentido hacia abajo. En la figura 24 representamos solo dos superficies equipotenciales y unas pocas líneas de fuerzas, en realidad

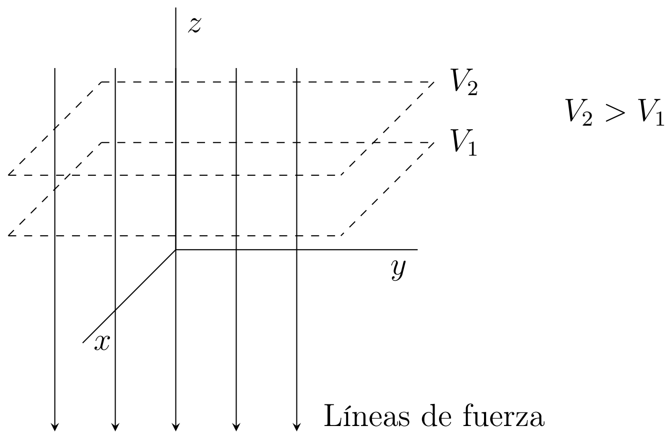

Figura 24:

ocupan todo el plano horizontal. *b*) Como el vector intensidad del campo eléctrico $\mathbf{E}$ tiene la misma dirección y sentido que las líneas de fuerza y la fuerza es $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, el electrón, al tener carga negativa, se moverá en la dirección del eje OZ creciente. Además como el campo eléctrico es constante la fuerza es constante por lo que experimenta un MRUA.

10. En las proximidades de la superficie terrestre se aplica un campo eléctrico uniforme. Se observa que al soltar una partícula de 2 g cargada con $5 \cdot 10^{-5}$ C permanece en reposo. *a*) Determine razonadamente las características del campo eléctrico (módulo, dirección y sentido). *b*) Explique que ocurriría si la carga fuera: *i*) $10 \cdot 10^{-5}$ C. *ii*) $-5 \cdot 10^{-5}$ C.

    Solución. *a*) La partícula permanece en reposo porque la fuerza eléctrica, $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, equilibra a su peso y como la partícula es positiva el campo eléctrico tiene que ser vertical, de sentido hacia arriba y el módulo cumple:

$$qE = mg \ \Rightarrow E = \frac{mg}{q} = \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8}{5 \cdot 10^{-5}} = 392 \text{ N/C}$$

    b) Si la carga valiera $10 \cdot 10^{-5}$ C el campo necesario sería menor y si fuera negativa el sentido del campo iría hacia abajo

11. Dos cargas puntuales, $q_1 = 2 \cdot 10^{-6}$ C y $q_2 = 8 \cdot 10^{-6}$ C, están situadas en los puntos $(-1{,}0)$ m y $(2{,}0)$ m, respectivamente. *a*) Determine en qué punto del segmento que une las dos cargas es nulo el campo y/o el potencial electrostático. ¿Y si fuera $q_1 = -2 \cdot 10^{-6}$ C? *b*) Explique, sin necesidad de hacer cálculos, si aumenta o disminuye la energía electrostática cuando se traslada otra carga, Q, desde el punto $(0{,}20)$ m hasta el $(0{,}10)$ m.

    Solución. *a*) En la figura 25 se ve el campo producido por cada partícula. Llamando

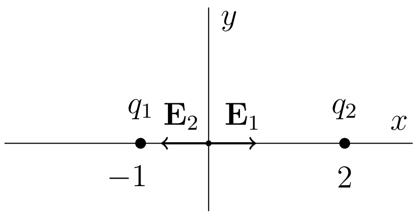

Figura 25:

x a la distancia comprendida entre q_1 y el punto en el que se anula el campo total,se cumple que los módulos tienen el mismo valor:

$$E_1 = E_2$$

$$\frac{k \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{x^2} = \frac{k \cdot 8 \cdot 10^{-6}}{(3-x)^2}$$

simplificando:

$$\frac{1}{x^2} = \frac{4}{(3-x)^2}$$

$$9 + x^2 - 6x = 4x^2$$

$$3x^2 + 6x - 9 = 0$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

la solución negativa no tiene sentido físico y la solución $x = 1$ nos indica que el campo es nulo en el origen de coordenadas. El potencial eléctrico no puede ser nulo puesto que la suma de dos valores positivos no pueden anularse. Si q_1 fuera negativa ahora el campo no podría anularse puesto que ambos vectores tendrían el mismo sentido pero sí se anularía el potencial, aunque no en el punto anterior puesto que la fórmula del potencial no tiene la distancia al cuadrado. Calculemos el punto:

$$V_{\text{total}} = V_1 + V_2$$
$$0 = \frac{kq_1}{x} + \frac{kq_2}{3-x}$$
$$-\frac{q_1}{x} = \frac{q_2}{3-x}$$
$$-\frac{-2 \cdot 10^{-6}}{x} = \frac{8 \cdot 10^{-6}}{3-x}$$
$$\frac{1}{x} = \frac{4}{3-x}$$
$$3 - x = 4x$$
$$5x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{5} \text{ m}$$

y como x es la distancia desde q_1, el campo se anula en el punto $(-0,4;0)$. *b*) El potencial creado por ambas cargas es positivo y podemos aproximarlo al creado por una carga puntual. Como vemos en su gráfica, figura 23, el potencial aumenta al pasar del punto (0,20) al (0,10) pero al multiplicar el potencial por la carga Q para obtener la energía potencial, la gráfica que obtenemos depende del signo de Q. Si la carga es positiva la energía potencial aumenta al acercarnos y si es negativa disminuye.

12. El campo eléctrico en un punto P, creado por una carga q situada en el origen, es de 2000 $\text{N} \cdot \text{C}^{-1}$ y el potencial eléctrico en P es de 6000 V. *a*) Determine el valor de q y la distancia del punto P al origen. *b*) Calcule el trabajo realizado al desplazar otra carga $Q = 1,2 \cdot 10^{-6}$ C desde el punto (3, 0) m al punto (0, 3) m. Explique por qué no hay que especificar la trayectoria seguida. Dato: $K = 9 \cdot 10^9$ $\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$.

    Solución. *a*) La figura 26 muestra el esquema. Nos dicen que:

$$\left.\begin{aligned} \frac{kq}{r^2} &= 2000 \\ \frac{kq}{r} &= 6000 \end{aligned}\right\}$$

dividiendo la segunda entre la primera obtenemos que $r = 3$ m y sustituyendo en la segunda:

$$q = \frac{6000 \cdot 3}{9 \cdot 10^9} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

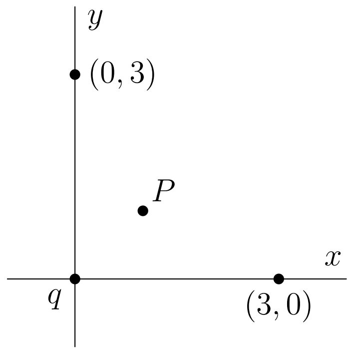

Figura 26:

b) El trabajo es $W_{\mathrm{c}} = Q\Delta V$ y como los puntos inicial y final se encuentran a la misma distancia del origen de coordenadas tienen el mismo potencial por lo que el trabajo realizado es cero. También podríamos razonarlo viendo que la fuerza es radial y que durante una trayectoria circular la fuerza y el vector desplazamiento forman 90° por lo que la fuerza eléctrica no realiza trabajo. Y si nos alejamos o acercamos radialmente el trabajo tiene el mismo valor pero signo contrario por lo que se anula. Por ello, vayamos por la trayectoria que vayamos el trabajo es cero.

13. Dos cargas $q_1 = -2 \cdot 10^{-8}$ C y $q_2 = 5 \cdot 10^{-8}$ C están fijas en los puntos $x_1 = -0,3$ m y $x_2 = 0,3$ m del eje OOX, respectivamente. a) Dibuje las fuerzas que actúan sobre cada carga y determine su valor. b) Calcule el valor de la energía potencial del sistema formado por las dos cargas y haga una representación aproximada de la energía potencial del sistema en función de la distancia entre las cargas.
Dato: $k = 9 \cdot 10^9$ N m^2 C^{-2}.

Solución. a) Como las cargas tienen distinto signo la interacción es atractiva. Las fuerzas se muestran en la figura 27 y su módulo es:

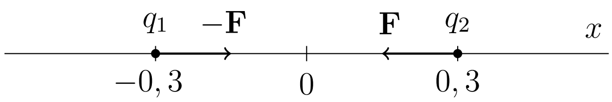

Figura 27:

$$F = \frac{k|q_1|q_2}{r^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-8} \cdot 5 \cdot 10^{-8}}{0,6^2} = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ N}$$

b) La energía potencial es:

$$E_{\mathrm{p}} = \frac{kq_1q_2}{r} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (-2 \cdot 10^{-8}) \cdot 5 \cdot 10^{-8}}{0,6} = -1,5 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$

y su gráfica se muestra en la figura 28.

14. Dos partículas de 10 g se encuentran suspendidas por dos hilos de 30 cm desde un mismo punto. Si se les suministra a ambas partículas la misma carga, se separan de modo que los hilos forman entre sí un ángulo de 60°. a) Dibuje en un diagrama

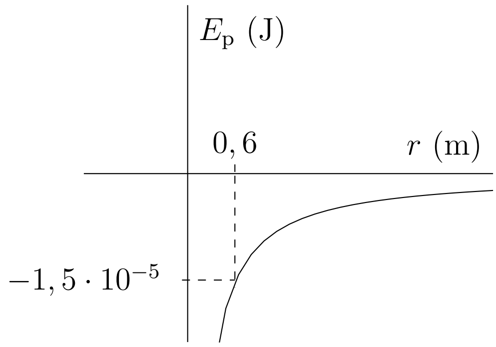

Figura 28: $E_\mathrm{p}=\frac{kq_1q_2}{r}$, si $q_1q_2<0$.

las fuerzas que actúan sobre las partículas y analice la energía del sistema en esa situación. *b*) Calcule el valor de la carga que se suministra a cada partícula.

Solución. *a*) Las partículas están en equilibrio por lo que las fuerzas se anulan y la fuerza eléctrica es repulsiva puesto que ambas partículas tienen la misma carga (figura 29). La energía del sistema está formada por la energía potencial

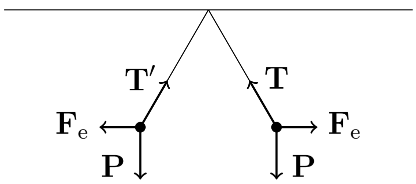

Figura 29:

eléctrica entre las cargas, la energía potencial gravitatoria de cada carga con la Tierra y la energía potencial gravitatoria entre las masas (aunque este término es despreciable). Si consideramos h la altura respecto a las partículas antes de recibir la carga y r la distancia entre las partículas una vez se encuentran cargadas tenemos que:

$$E_\mathrm{p}=\frac{kq^2}{r}+2mgh-\frac{Gm^2}{r}$$

b) El triángulo es equilátero ya que los ángulos de las bases valen 60°. Lo sabemos porque la vertical que baja del punto de apoyo (figura 30) lo divide en dos triángulos con 30° en el ángulo superior y uno recto en la base por lo que el

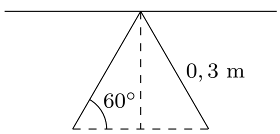

Figura 30:

restante vale 60°. Por tanto la distancia entre las cargas vale 0,3 m. También lo podemos averiguar porque se cumple que la mitad de la distancia vale $0,3\,\mathrm{sen}\,30°$.

Escribimos el equilibrio de fuerzas:

$$\left.\begin{aligned} T\,\mathrm{sen}\,60^\circ &= mg \\ T\cos 60^\circ &= \frac{kq^2}{r^2} \end{aligned}\right\}$$

y dividiéndolas entre sí:

$$\mathrm{tg}\,60^\circ = \frac{mgr^2}{kq^2}$$

$$q = \sqrt{\frac{mgr^2}{k\,\mathrm{tg}\,60^\circ}} = \sqrt{\frac{10\cdot 10^{-3}\cdot 9,8\cdot 0,3^2}{9\cdot 10^9\,\mathrm{tg}\,60^\circ}} = 7,52\cdot 10^{-7}\ \mathrm{C}$$

15. Dos partículas con cargas positivas iguales de $4\cdot 10^{-6}$ C ocupan dos vértices consecutivos de un cuadrado de 1 m de lado. *a*) Calcule el potencial electrostático creado por ambas cargas en el centro del cuadrado. ¿Se modificaría el resultado si las cargas fueran de signos opuestos? *b*) Calcule el trabajo necesario para trasladar una carga de $5\cdot 10^{-7}$ C desde uno de los dos vértices restantes hasta el centro del cuadrado. ¿Depende este resultado de la trayectoria seguida por la carga?
Dato: $k = 9\cdot 10^9$ N m^2 C^{-2}.

Solución. *a*) Por el principio de superposición el potencial en el centro del cuadrado es la suma de los potenciales creados por cada carga en dicho punto (figura 31) y como son iguales:

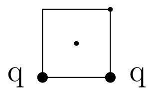

Figura 31:

$$V_\mathrm{c} = V_{\mathrm{c}1} + V_{\mathrm{c}2} = 2V_{\mathrm{c}1} = 2\frac{kq}{r} = 2\cdot\frac{9\cdot 10^9\cdot 4\cdot 10^{-6}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1,02\cdot 10^5\ \mathrm{V}$$

Si las cargas fueran de signos opuestos el potencial total sería cero puesto que los potenciales creados por cada carga tendrían signo contrario.

b) Usamos la definición de energía potencial entre el vértice y el centro:

$$W_\mathrm{c} = -\Delta E_\mathrm{p} = -q\Delta V = -q(V_\mathrm{c} - V_\mathrm{v})$$

$$V_\mathrm{v} = V_{1v} + V_{2v} = \frac{9\cdot 10^9\cdot 4\cdot 10^{-6}}{1} + \frac{9\cdot 10^9\cdot 4\cdot 10^{-6}}{\sqrt{2}} = 6,15\cdot 10^4\ \mathrm{V}$$

$$W_\mathrm{c} = -5\cdot 10^{-7}\left(1,02\cdot 10^5 - 6,15\cdot 10^4\right) = -0,0203\ \mathrm{J}$$

Como el trabajo realizado por el campo es negativo significa que el movimiento no es espontáneo (recuerda que un objeto en caída libre realiza un movimiento espontáneo y el trabajo realizado por el campo es positivo puesto que la fuerza y el desplazamiento tienen igual sentido) por lo tanto debemos realizar un trabajo no conservativo en contra del campo para que la partícula se desplace del vértice al centro. El resultado no depende de la trayectoria porque un trabajo conservativo solo depende de las posiciones inicial y final.

INTERACCIÓN ELECTROMAGNÉTICA. MAGNETISMO

1. Un protón se mueve en el sentido positivo del eje OY en una región donde existe un campo eléctrico de $3 \cdot 10^5$ N $\cdot$ C^{-1} en el sentido positivo del eje OZ y un campo magnético de 0,6 T en el sentido positivo del eje OX. *a*) Dibuje en un esquema las fuerzas que actúan sobre la partícula y razone en qué condiciones la partícula no se desvía. *b*) Si un electrón se moviera en el sentido positivo del eje OY con una velocidad de 10^3 m $\cdot$ s^{-1}, ¿sería desviado? Explíquelo.

   Solución. *a*) Como es una partícula positiva, la fuerza eléctrica tiene el mismo sentido que el campo eléctrico:

$$\mathbf{F}_{\mathrm{e}} = q\mathbf{E}$$

   La fuerza magnética la obtenemos mediante la ley de Lorentz:

$$\mathbf{F}_{\mathrm{m}} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

   y es perpendicular al plano formado por el vector velocidad y el vector campo magnético (plano XY), por tanto se encuentra en la dirección del eje OZ. Para averiguar el sentido aplicamos la regla del tornillo: si giramos un tornillo en el sentido de $\mathbf{v}$ a $\mathbf{B}$ este baja, por tanto el sentido es decreciente del eje OZ. Ambas fuerzas se muestran en la figura 32. La partícula no se desviará cuando las fuerzas

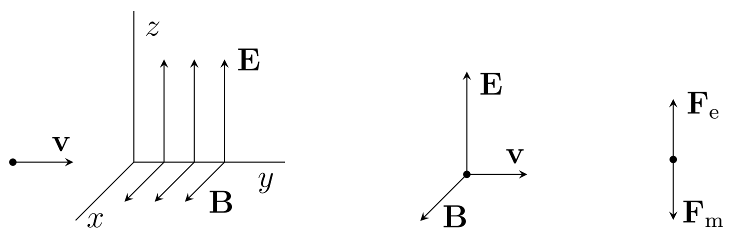

Figura 32:

   se anulen. Como tienen la misma dirección pero diferente sentido se anulan cuando los módulos sean iguales:

$$F_{\mathrm{m}} = F_{\mathrm{e}} \tag{10}$$

$$qvBsen90° = qE$$

$$v = \frac{E}{B} = \frac{3 \cdot 10^5}{0,6} = 5 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

   por lo que no se desvía si entra justamente con esa velocidad. También podemos plantear que las fuerzas se anulan de manera vectorial:

$$\mathbf{F}_{\mathrm{e}} + \mathbf{F}_{\mathrm{m}} = 0$$

$$\mathbf{F}_{\mathrm{e}} = -\mathbf{F}_{\mathrm{m}} \tag{11}$$

   pero no debemos confundir las ecuaciones 11 y 10. En la ecuación 11 todavía tenemos que expresar los vectores en función de vectores unitarios. Cuando solo tenemos dos fuerzas con igual dirección y sentido contrario es mucho más sencillo igualar los módulos como en 10. *b*) Al ser un electrón, la fuerza eléctrica va hacia abajo y la magnética hacia arriba (el signo menos de la carga del electrón nos invierte el sentido deducido por la regla del tornillo). Al entrar con menor velocidad, la fueza magnética disminuye y por tanto el electrón se desvía hacia abajo.

2. Conteste razonadamente a las siguientes cuestiones: *a*) ¿Es posible que una carga eléctrica se mueva en un campo magnético uniforme sin que actúe ninguna fuerza sobre ella? *b*) ¿Es posible que una carga eléctrica se mueva en un campo magnético uniforme sin que varíe su energía cinética?

   Solución. *a*) Sí, si se mueve en la misma dirección del campo. En ese caso el producto vectorial entre la velocidad y el campo magnético vale cero:

$$F_{\mathrm{m}} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = qvB \operatorname{sen} 0 = 0$$

   b) Sí, de hecho es la única manera porque la fuerza magnética es siempre perpendicular a la velocidad, por tanto no realiza trabajo sobre la partícula y por el teorema trabajo-energía tenemos que

$$W_{\mathrm{total}} = \Delta E_{\mathrm{c}}$$

   por lo que la energía cinética permanece constante.

3. Un electrón penetra con velocidad v en una zona del espacio en la que coexisten un campo eléctrico E y un campo magnético B, uniformes, perpendiculares entre sí y perpendiculares a v. *a*) Dibuje las fuerzas que actúan sobre el electrón y escriba las expresiones de dichas fuerzas. *b*) Represente en un esquema las direcciones y sentidos de los campos para que la fuerza resultante sea nula. Razone la respuesta.

   Solución. Semejante al ejercicio de la figura 32

4. Un protón, que se encuentra inicialmente en reposo, se acelera por medio de una diferencia de potencial de 6000 V. Posteriormente, penetra en una región del espacio donde existe un campo magnético de 0,5 T, perpendicular a su velocidad. *a*) Calcule la velocidad del protón al entrar en el campo magnético y el radio de su trayectoria posterior. *b*) ¿Cómo se modificarían los resultados del apartado *a*) si se tratara de una partícula alfa, cuya masa es aproximadamente cuatro veces la del protón y cuya carga es dos veces la del mismo?
   Datos: $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C y $m_{\mathrm{p}} = 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg.

   Solución. *a*) Nos despreocupamos de los signos porque sabemos que la energía potencial se transforma en cinética:

$$\frac{1}{2}mv^2 = q|\Delta V|$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 6000$$

   pero de manera formal es:

$$\Delta E_{\mathrm{c}} = -\Delta E_{\mathrm{p}}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = -q\Delta V$$

como el potencial disminuye, su diferencia es negativa

$$\frac{1}{2}mv^2 = -q(-6000)$$

Obtenemos la velocidad:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 6000}{1,66 \cdot 10^{-27}}} = 1,08 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

Como la fuerza magnética siempre es perpendicular a la velocidad, le proporciona la fuerza centrípeta:

$$qvBsen90 = \frac{mv^2}{r}$$

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{1,66 \cdot 10^{-27} \cdot 1,08 \cdot 10^6}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,5} = 0,022 \text{ m}$$

b) Hemos deducido que la velocidad es

$$v = \sqrt{\frac{-2q\Delta V}{m}}$$

Si cambia la masa y la carga, la nueva velocidad es

$$v' = \sqrt{\frac{-2q'\Delta V}{m'}}$$

sustituimos $m' = 4m$ y $q' = 2q$

$$v' = \sqrt{\frac{-2 \cdot 2q\Delta V}{4m}}$$

buscamos la ecuación original

$$v' = \sqrt{\frac{-2q\Delta V}{2m}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{-2q\Delta V}{m}} = \frac{1}{\sqrt{2}}v$$

y racionalizamos:

$$v' = \frac{\sqrt{2}}{2}v$$

Por tanto la partícula alfa coge una velocidad 0,707 veces menor que el protón. Procedemos igual para el radio:

$$r = \frac{mv}{qB}$$

si cambia la masa, la carga y la velocidad, el nuevo radio es

$$r' = \frac{m'v'}{q'B}$$

sustituimos $m' = 4m$, $q' = 2q$ y $v' = \frac{\sqrt{2}}{2}v$

$$r' = \frac{4m\frac{\sqrt{2}}{2}v}{2qB} = \sqrt{2}r$$

por lo que el radio aumenta en el factor 1,4142.

5. Una partícula cargada penetra en un campo eléctrico uniforme con una velocidad perpendicular al campo. *a*) Describa la trayectoria seguida por la partícula y explique cómo cambia su energía. *b*) Repita el apartado anterior si en vez de un campo eléctrico se tratara de un campo magnético.

   Solución. *a*) Como el campo eléctrico es constante, la fuerza eléctrica también lo es: $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. La partícula entra perpendicular al campo por lo que nos encontramos con una composición de movimientos, un MRU y un MRUA, como en el tiro horizontal (figura 33) Como solo actúa el campo eléctrico y este es conservativo,

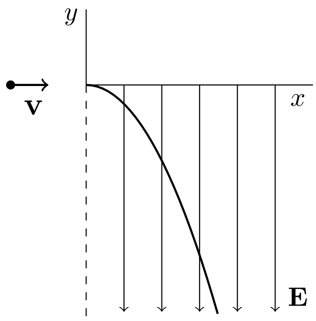

Figura 33:

la energía mecánica se conserva y la energía potencial inicial se transforma en energía cinética. *b*) En este caso la fuerza magnética (ley de Lorentz) también es constante, pero es centrípeta, por lo que la partícula describe un MCU alrededor de las líneas de fuerza del campo magnético (figura 34). Por claridad hemos

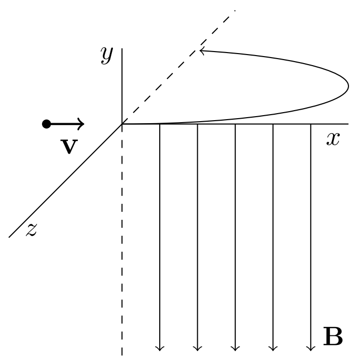

Figura 34:

dibujado las líneas en un plano, queda claro que ocupan todo el volumen que se encuentra a la derecha del plano YZ. Como vemos en la figura la partícula describe media circunferencia y vuelve a salir con sentido contrario. En algunos libros, por un exceso de simplificación, se indica que la partícula se queda girando pero ya vemos que la partícula vuelve a salir. Para quedarse girando debería de generarse el campo alrededor de la partícula en movimiento, por ejemplo con un electroimán. Si suponemos que el campo pasa de cero a su valor de manera instantánea, la partícula giraría en una circunferencia. Pero en la realidad el campo aumentaría desde cero hasta su valor y en ese proceso la partícula describiría un arco cada vez más cerrado hasta llegar al radio final de giro. Otra posibilidad es que las partículas cargadas salgan de un dispositivo que se encuentre en el seno del campo, en este caso sí se quedan atrapadas describiendo una circunferencia.

6. Un protón penetra en un campo eléctrico uniforme de 200 $\mathrm{N} \cdot \mathrm{C}^{-1}$, con una velocidad de 106 m/s perpendicular a dicho campo. *a*) Explique, con ayuda de un esquema, las características del campo magnético que habría que aplicar, superpuesto al eléctrico, para que no se modifique la dirección y sentido de la velocidad inicial del protón. *b*) Calcule el valor de dicho campo magnético. ¿Se modificaría el resultado si en vez de un protón penetrase, en las mismas condiciones, un electrón? Dato: $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

   Solución. *a*) Semejante al ejercicio de la figura 32. *b*) La fuerza magnética y eléctrica se anulan:
$$qvB \operatorname{sen} 90^\circ = qE$$
$$B = \frac{E}{v} = \frac{200}{106} = 1,89 \text{ T}$$
   Si entra un electrón no se modifica el resultado, tan solo se invierte el sentido de ambas fuerzas.

7. Un electrón, un protón y un átomo de helio penetran en una zona del espacio en la que existe un campo magnético uniforme en dirección perpendicular a la velocidad de las partículas. *a*) Dibuje la trayectoria que seguirá cada una de las partículas e indique sobre cuál de ellas se ejerce una fuerza mayor. *b*) Compare las aceleraciones de las tres partículas. ¿Cómo varía su energía cinética? Datos: m_{e}, m_{p} y m_{He}.

   Solución. El helio es neutro por lo que no experimenta fuerza magnética. El protón y el electrón tienen la misma carga pero de sentido contrario. Por tanto experimentan la misma fuerza pero con sentido contrario, que les hace girar en sentidos opuestos. Vamos a representar el movimiento en dos dimensiones en lugar de en perspectiva. Los vectores que salgan del papel los representamos con puntos y los que entren con aspas. La figura 35 representa el movimiento. Como vemos,

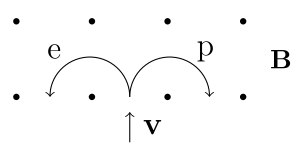

Figura 35:

el campo magnético permite separar cargas de signo opuesto. *b*) Al aplicar la segunda ley de Newton, como la fuerza es la misma, el electrón experimenta más aceleración que el protón porque tiene menos masa:
$$a = \frac{F}{m}$$
y el helio no experimenta aceleración. Ninguna de las tres partículas experimenta variación de la energía cinética porque la fuerza magnética es centrípeta y no realiza trabajo.

8. Un protón penetra en un campo magnético, con velocidad perpendicular al campo, y describe una trayectoria circular con un periodo de 10^{-5} s. *a*) Dibuje en un esquema el campo magnético, la fuerza que actúa sobre el protón y su velocidad en un punto de la trayectoria. *b*) Calcule el valor del campo magnético. Si el radio de la trayectoria que describe es de 5 cm, ¿cuál es la velocidad de la partícula? Datos: $m_{\mathrm{p}} = 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg y $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

   Solución. *a*) La trayectoria se muestra en la figura 35. La figura 36 muestra los vectores pedidos justo en el momento de entrar en el campo magnético. La fuerza que actúa sobre el protón es la fuerza de Lorentz, $\mathbf{F}_{\mathrm{m}} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, y debido a las propiedades del producto vectorial tiene dicha orientación. *b*) Multiplicando

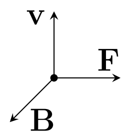

Figura 36:

   por dos el tiempo que tarda en entrar y salir del campo magnético obtenemos el periodo, y como la fuerza magnética proporciona la fuerza centrípeta:

$$qvB \operatorname{sen} 90^\circ = \frac{mv^2}{r}$$

$$qB = \frac{mv}{r} \tag{12}$$

   combinando $v = \omega r$ y $\omega = \frac{2\pi}{T}$ obtenemos $v = \frac{2\pi r}{T}$ y sustituimos

$$qB = \frac{m2\pi r}{rT}$$

$$B = \frac{2\pi m}{qT} = \frac{2\pi \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-5}} = 6,51 \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

   La velocidad la despejamos en la ecuación 12:

$$v = \frac{qBr}{m} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 6,51 \cdot 10^{-3} \cdot 0,05}{1,66 \cdot 10^{-27}} = 3,13 \cdot 10^{4} \text{ m/s}$$

9. Una partícula con una carga de $-2 \cdot e$, una masa de 10^{-20} kg y una velocidad $\mathbf{v} = (10\ \mathbf{i} + 20\ \mathbf{j})$ m/s penetra en una zona con un campo magnético $\mathbf{B} = 0,1\,\mathbf{i}$ T. *a*) Determine el módulo de la fuerza que experimenta la partícula. *b*) ¿Qué movimiento describe la partícula? Dato: $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

   Solución. *a*) La partícula viene por el plano XY. Supongamos que entra en el campo por el origen de coordenadas. Aplicamos la fórmula de Lorentz:

$$\mathbf{F}_{\mathrm{m}} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

   y como los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{B}$ no están en la dirección de los ejes calculamos su producto vectorial mediante la regla de Sarrus:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (v_y B_z - v_z B_y)\mathbf{i} - (v_x B_z - v_z B_x)\mathbf{j} + (v_x B_y - v_y B_x)\mathbf{k}$$

La regla nemotécnica para la componente x se muestra en la figura 37. Como vemos multiplicamos en cruz las componentes y y z. Procedemos igual para la

$$\begin{vmatrix} v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (v_y B_z - v_z B_y)\mathbf{i}$$

Figura 37:

componente z (figura 38). Y la para la componente y es igual pero le cambiamos

$$\begin{vmatrix} v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (v_x B_y - v_y B_x)\mathbf{k}$$

Figura 38:

el signo (figura 39).

$$\begin{vmatrix} v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = -(v_x B_z - v_z B_x)\mathbf{j}$$

Figura 39:

En nuestro caso:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 10 & 20 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (20 \cdot 0 - 0 \cdot 0)\mathbf{i} - (10 \cdot 0 - 0 \cdot 0,1)\mathbf{j} + (10 \cdot 0 - 20 \cdot 0,1)\mathbf{k} = -2\mathbf{k}$$

y la fuerza es:

$$F_{\mathrm{m}} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -2e \cdot (-2)\mathbf{k} = 4e\mathbf{k}\ \mathrm{N}$$

por lo que el módulo pedido vale $4e$ N. Otra manera de calcularlo es ver que la componente v_x de la velocidad no experimenta fuerza magnética puesto que es paralela al campo y que solo la componente v_y la experimenta. Como esta componente forma un ángulo recto, el módulo de la fuerza es:

$$F = |q\mathbf{v}_y \times \mathbf{B}|$$

$$F = |2e \cdot 20\ \mathbf{j} \times 0,1\ \mathbf{i}|$$

$$F = 2e \cdot 20 \cdot 0,1 \operatorname{sen} 90^\circ = 4e\ \mathrm{N}$$

y por la regla del tornillo vemos que tiene sentido creciente por lo que:

$$\mathbf{F} = 4e\mathbf{k}\ \mathrm{N}$$

b) Nos encontramos con una composición de movimientos. En el eje OY describe media circunferencia (MCU) y en el OX un MRU. El resultado es un movimiento helicoidal alrededor de las líneas de fuerza (figura 40). Por un exceso de simplificación se suele indicar que la partícula queda encerrada describiendo una hélice pero realmente describe media hélice (gráfica en negrita) y abandona el campo.

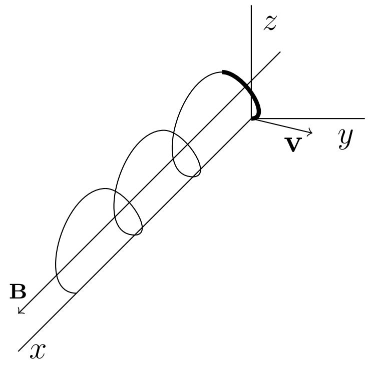

Figura 40:

10. *a*) Explique razonadamente la acción de un campo magnético sobre un conductor rectilíneo, perpendicular al campo, por el que circula una corriente eléctrica y dibuje en un esquema la dirección y sentido de todas las magnitudes vectoriales que intervienen. *b*) Explique qué modificaciones se producirían, respecto del apartado anterior, en los casos siguientes: *i*) si el conductor forma un ángulo de 45° con el campo; *ii*) si el conductor es paralelo al campo.

    Solución. *a*) La figura 41 muestra todas la magnitudes vectoriales. La fuerza mag-

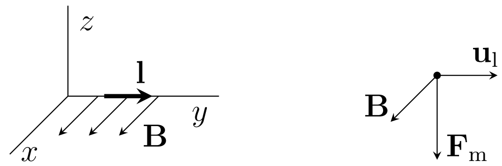

Figura 41:

nética por unidad de longitud l viene dada por la ley de Lorentz aplicada a corrientes eléctricas:

$$\frac{\mathbf{F}_{\mathrm{m}}}{l} = I\mathbf{u}_{\mathrm{l}} \times \mathbf{B}$$

donde I es la intensidad de corriente que circula por el conductor, $\mathbf{u}_{\mathrm{l}}$ es el vector unitario en la dirección y sentido del conductor rectilíneo y $\mathbf{l}$ (letra ele) describe vectorialmente al conductor:

$$\mathbf{l} = l\mathbf{u}_{\mathrm{l}}$$

El módulo de la fuerza es

$$\frac{F_{\mathrm{m}}}{l} = IB \operatorname{sen} 90^\circ = IB$$

b) *i*) En este caso solo se modifica el módulo de la fuerza:

$$\frac{F_{\mathrm{m}}}{l} = IB \operatorname{sen} 45^\circ = IB\frac{\sqrt{2}}{2}$$

por lo que se reduce en el factor 0,707. *ii*) Pero ahora la fuerza es nula puesto que $\operatorname{sen} 0 = 0$.

11. Un alambre muy largo, recto y horizontal que conduce una corriente de 16 A en la dirección Oeste–Este, se encuentra en un lugar en el que el campo magnético terrestre está dirigido en la dirección Norte y tiene una intensidad de $4 \cdot 10^{-5}$ T. *a*) Halle la fuerza que ejerce el campo magnético sobre cada metro de alambre. *b*) Si la masa de un metro de alambre es de 50 g, calcule el valor de la intensidad de la corriente que debe recorrer dicho conductor para que no caiga por efecto de la gravedad. Datos: $g = 10$ m/s^2.

    Solución. *a*) La figura 42 muestra la situación vista desde arriba. La fuerza mag-

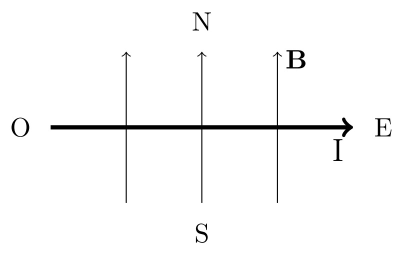

Figura 42:

nética tiene dirección vertical, sentido hacia arriba y modulo:

$$\frac{F_{\mathrm{m}}}{l} = IB\ 90^{\circ}$$

y por cada metro de alambre:

$$\frac{F_{\mathrm{m}}}{1} = 16 \cdot 4 \cdot 10^{-5} \cdot 1 = 6,4 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{N}/m$$

b) La fuerza magnética debe equilibrar al peso:

$$IB = mg\ \Rightarrow I = \frac{mg}{B} = \frac{50 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8}{4 \cdot 10^{-5}} = 12250\ \mathrm{A}$$

y se necesita una corriente de 12250 A, un valor elevadísimo, en una casa los cables están preparados para una corriente máxima de 16 A.

12. Dos conductores rectilíneos, verticales y paralelos, A a la izquierda y B a la derecha, distan entre sí 10 cm. Por A circula una corriente de 10 A hacia arriba. *a*) Calcule la corriente que debe circular por B, para que el campo magnético en un punto situado a 4 cm a la izquierda de A sea nulo. *b*) Explique con ayuda de un esquema si puede ser nulo el campo magnético en un punto intermedio entre los dos conductores.
    Dato: $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ N A^{-2}.

    Solución. *a*) A partir de la permeabilidad del medio, μ_0, obtenemos la constante magnética, k_{m}:

$$k_{\mathrm{m}} = \frac{\mu_0}{4\pi}$$

La ley de Biot-Savart permite calcular el campo magnético producido por un conductor rectilíneo. El modulo es:

$$B = \frac{k_{\mathrm{m}} 2I}{r}$$

y la dirección y sentido nos la indican los dedos de la mano derecha al apuntar el pulgar hacia el sentido de la corriente. El conductor A produce un campo que sale del papel (representado por un punto en la figura 43), por lo que la corriente del

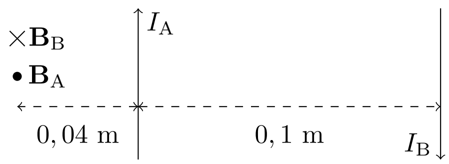

Figura 43:

conductor B debe ir hacia abajo para que el campo que crea vaya hacia el papel (representado por un aspa) y ambos campos se anulan cuando sus módulos sean iguales:

$$\frac{k_\mathrm{m} 2 I_\mathrm{A}}{r_\mathrm{A}} = \frac{k_\mathrm{m} 2 I_B}{r_\mathrm{B}}$$

$$\frac{10}{0,04} = \frac{I_\mathrm{B}}{0,14}$$

$$I_\mathrm{B} = \frac{10 \cdot 0,14}{0,04} = 35 \text{ A}$$

b) No puede ser nulo porque ambos conductores crean el campo magnético hacia dentro del papel como se muestra en la figura 44.

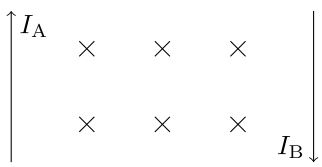

Figura 44:

13. *a*) La fuerza que actúa sobre una partícula cargada que se mueve en un campo magnético no realiza trabajo. ¿Por qué? *b*) Un alambre recto muy largo transporta una corriente de intensidad I. Un protón se mueve con velocidad v perpendicular al alambre y se encuentra en un instante a una distancia r del alambre. Dibuje en un esquema la dirección y sentido del campo magnético y de la fuerza que actúa sobre el protón.

Solución. *a*) La fuerza magnética siempre es perpendicular a $\mathbf{v}$. La definición de velocidad es:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

y vemos que $\mathbf{v}$ y $d\mathbf{r}$ solo se diferencian en el escalar $\frac{1}{dt}$, que siempre es positivo porque el tiempo nunca va hacia atrás, por lo que ambos vectores tienen la misma dirección y sentido. El trabajo es:

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$W = \int F dr \cos 90°$$

y como $\cos 90° = 0$, el trabajo siempre es cero. *b*) El campo magnético producido por el alambre viene descrito por la ley de Biot-Savart. Tiene dirección tangencial y sentido conforme a la rega de la mano derecha. La fuerza nos la da le ley de Lorentz. Una posibilidad se muestra en dos y tres dimensiones en la figura 45. Como la velocidad y el campo tienen la misma dirección, no existe fuerza

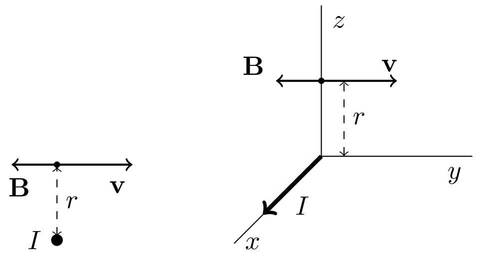

Figura 45:

magnética. Otra posibilidad se muestra en la figura 46. Y la última posibilidad

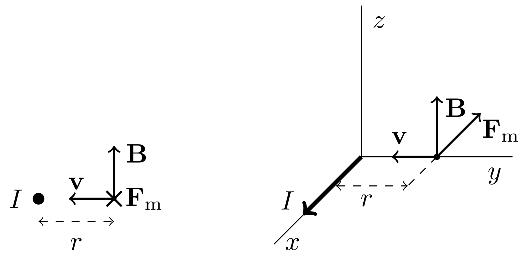

Figura 46:

en la figura 47. En este caso la fuerza tiene menor módulo que en el caso anterior

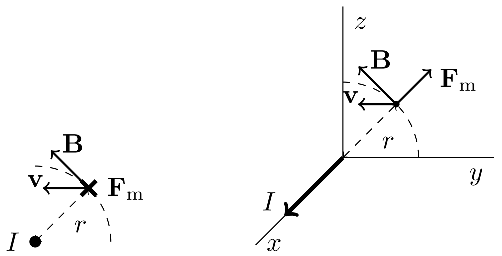

Figura 47:

porque la velocidad y el campo forman un ángulo menor de 90°. El arco a trazos muestra que este caso es intermedio entre el primero y el segundo.

14. Por dos conductores rectilíneos paralelos circulan corrientes de igual intensidad y sentido. *a*) Indique la dirección y sentido de las fuerzas que se ejercen los conductores entre sí. ¿Depende esta fuerza de la corriente que circula por ellos? *b*) Represente gráficamente la situación en la que la fuerza es repulsiva.

Solución. a) Cada conductor genera un campo magnético conforme a la ley de Biot-Savart. Y a su vez experimenta una fuerza, conforme a la ley de Lorentz, debido a su interacción con el campo producido por el otro conductor. Por la tercera ley de Newton ambas fuerzas son iguales pero de sentido contrario. Su módulo viene resumido en esta fórmula:

$$F = \frac{k_{\mathrm{m}} 2 I I'}{r} = \frac{k_{\mathrm{m}} 2 I^2}{r}$$

y como vemos la fuerza depende de la intensidad de corriente que circula por ellos. La dirección y sentido se muestra en la figura 48 b) En este caso las corrientes

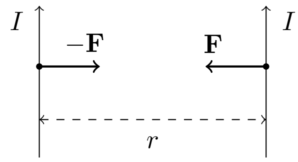

Figura 48:

tienen sentido contrario (figura 49).

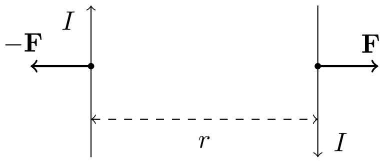

Figura 49:

15. Dos conductores rectilíneos e indefinidos, paralelos, por los que circulan corrientes de igual intensidad, I, están separados una distancia de 0,1 m y se repelen con una fuerza por unidad de longitud de $6 \cdot 10^{-9}$ N $\cdot$ m^{-1}. a) Explique cualitativamente, con la ayuda de un esquema en el que dibuje el campo y la fuerza que actúa sobre cada conductor, el sentido de la corriente en cada uno de ellos. b) Calcule el valor de la intensidad de corriente que circula por cada conductor.
Dato: $k_{\mathrm{m}} = 10^{-7}$ T m A^{-1}.

Solución. a) La fuerza viene regida por:

$$\frac{F}{l} = \frac{k_{\mathrm{m}} 2 I^2}{r} \tag{13}$$

que incluye la ley de Biot-Savart y la ley de Lorentz, y como se repelen los sentidos son contrarios. La ley de Biot-Savart nos dice que el campo magnético tiene dirección tangencial a circunferencias concéntricas alrededor del conductor, el sentido nos lo indica la regla de la mano derecha y su módulo es:

$$B = \frac{k_{\mathrm{m}} 2 I}{r}$$

por ello el campo, en ambos casos, entra en el papel (figura 50). b) Despejamos

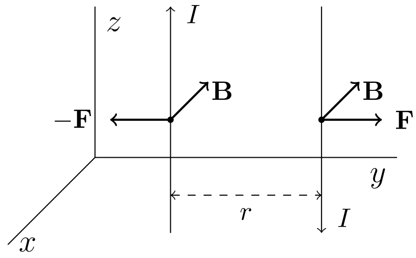

Figura 50:

la intensidad en 13:

$$I = \sqrt{\frac{Fr}{lk_{\mathrm{m}}2}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 10^{-9} \cdot 0,1}{10^{-7} \cdot 2}} = 0,055 \text{ A}$$

16. Dos conductores rectilíneos e indefinidos, paralelos, por los que circulan corrientes de igual intensidad, I, y diferente sentido están separados una distancia r. Dibuje, aproximadamente, cómo es el campo magnético que producen a su alrededor.

    Solución. La ley de Biot-Savart nos dice que el campo magnético tiene dirección tangencial a circunferencias concéntricas alrededor del conductor, el sentido nos lo indica la regla de la mano derecha y su módulo es:

    $$B = \frac{k_{\mathrm{m}}2I}{r}$$

    En el espacio entre los dos conductores la resultante del campo producido por cada conductor entra en el papel y se debilita conforme se acerca al centro. En los espacios externos la resultante sale del papel, puesto que tiene mayor módulo el campo creado por el conductor más cercano, y se debilita al alejarse (figura 51).

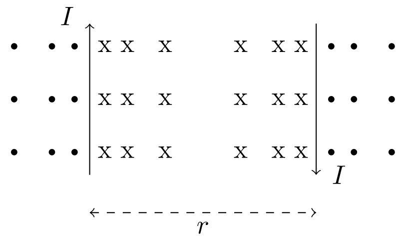

Figura 51:

17. Por tres conductores rectilíneos, coplanarios y paralelos, separados entre sí 40 cm, circula una corriente de 1 A por los conductores de los extremos y de 2 A por el conductor central. El sentido de la corriente de los conductores de los extremos es el mismo, y es opuesto al sentido de la corriente del conductor central. Calcule la fuerza neta por unidad de longitud que actúa sobre cada conductor.
    Dato: $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ m kg C^{-2}.

    Solución. A partir de la permeabilidad del medio, μ_0, obtenemos la constante magnética, k_{m}:

    $$k_{\mathrm{m}} = \frac{\mu_0}{4\pi}$$

Estudiamos las interacciones por parejas (figura 52). Los conductores de los ex-

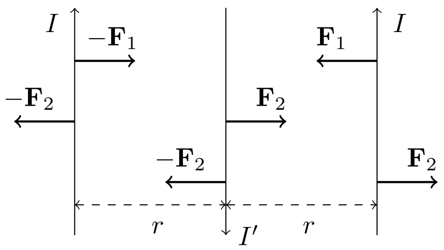

Figura 52:

tremos tienen igual sentido por lo que se atraen. Cada conductor del extremo con el conductor central se repele y además el modulo es el mismo. Por tanto la fuerza neta que experimenta el conductor central es cero. Hallamos los modulos:

$$\frac{F_1}{l} = \frac{k_{\rm m} 2I^2}{r} = \frac{10^{-7} \cdot 2 \cdot 1^2}{0,8} = 2,5 \cdot 10^{-7}\ \frac{\rm N}{\rm m}$$

$$\frac{F_2}{l} = \frac{k_{\rm m} 2II'}{r} = \frac{10^{-7} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2}{0,4} = 10^{-6}\ \frac{\rm N}{\rm m}$$

y la fuerza neta que reciben los conductores de los extremos es:

$$\frac{F_2}{l} - \frac{F_1}{l} = 7,5 \cdot 10^{-7}\ \rm N\ m^{-1}$$

y su sentido es, en ambos casos, hacia afuera.

INTERACCIÓN ELECTROMAGNÉTICA. INDUCCIÓN

18. Una espira atraviesa una región del espacio en la que existe un campo magnético uniforme, vertical y hacia arriba. La espira se mueve en un plano horizontal. *a*) Explique si circula corriente o no por la espira cuando: *i*) está penetrando en la región del campo; *ii*) mientras se mueve en dicha región; *iii*) cuando está saliendo. *b*) Indique el sentido de la corriente, en los casos en que exista, mediante un esquema.

Solución. *a*) Conforme a la ley de Faraday-Lenz:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} \tag{14}$$

se inducirá fuerza electromotriz cuando el flujo magnético varíe en el tiempo. Por la ley de Ohm, $I = V/R$, dicha fuerza electromotriz producirá a su vez circulación de corriente. En *i*) y *iii*) sí circula corriente porque el flujo varía al entrar o salir del campo y en *ii*) no, porque el flujo es constante. *b*) El sentido de la corriente se muestra en la figura 53. Elegimos el vector **S**, que define a la superficie, con sentido hacia arriba y así el flujo es:

$$\phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = BS \cos 0$$

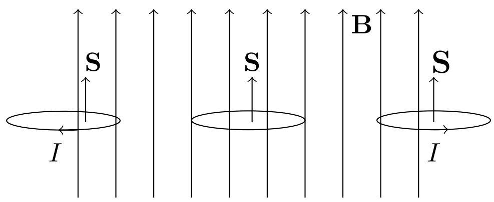

Figura 53:

Al entrar la espira en el campo aumenta el número de líneas de fuerza que la atraviesan por lo que el flujo aumenta. La ley de Lenz (el signo menos en la ecuación 14) nos dice que la corriente que se induce tiene un sentido tal, que produce un campo magnético cuyo flujo magnético contrarresta a la variación original. Por eso el sentido de la corriente inducida es horario, porque produce un campo magnético hacia abajo con un flujo negativo, $\phi_{\text{inducido}} = B_{\text{inducido}} S \cos 180°$, que contrarresta el aumento original. Como regla nemotécnica usamos la regla de la mano derecha: pulgar hacia **S** y si el flujo aumenta, el sentido de la corriente inducida es el contrario del que nos dicen los dedos. Cuando la espira sale, como el flujo disminuye, el sentido es antihorario.

19. Una espira cuadrada de 2 m de lado está situada perpendicularmente a un campo magnético uniforme de 0,5 T. *a*) Explique razonadamente si, en estas circunstancias, se induce corriente eléctrica en la espira. *b*) Determine la fuerza electromotriz media inducida en la espira si, en 0,1 s, gira 90° en torno a un eje perpendicular al campo.

    Solución. *a*) La figura 54 muestra la posición inicial y final de la espira. Ni en

    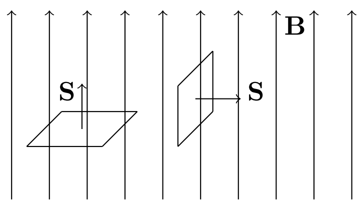

    Figura 54:

    la posición inicial ni en la final se induce corriente porque el flujo magnético es constante, solo se induce durante el giro, que es cuando disminuye el flujo magnético, conforme a la elección que hemos realizado del vector **S**. *b*) La fuerza electromotriz media es:

    $$\mathcal{E}_{\text{m}} = -\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = -\frac{0 - BS\cos 0}{\Delta t} = \frac{0,5 \cdot 4}{0,1} = 20 \text{ V}$$

    y el sentido de la corriente es antihorario.

20. Una espira circular de 10 cm de diámetro, inmóvil, está situada en una región en la que existe un campo magnético, perpendicular a su plano, cuya intensidad varía de 0,5 a 0,2 T en 0,1 s. *a*) Dibuje en un esquema la espira, el campo y el sentido de la corriente inducida, razonando la respuesta. *b*) Calcule la fuerza

electromotriz media inducida y razone cómo cambiaría dicha fuerza electromotriz si la intensidad del campo aumentase en lugar de disminuir.

Solución. *a*) En la figura 55 representamos el campo saliendo del papel y el vector

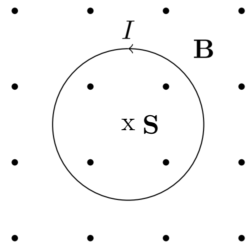

Figura 55:

S entrando. De este modo el flujo es negativo puesto que:

$$\phi = BS\cos 180^\circ$$

Si el campo disminuye el flujo aumenta (de un valor negativo se acerca a 0) y se induce una corriente conforme a la ley Faraday-Lenz (ecuación 14). El sentido es el contrario del que nos indican los dedos, una vez el pulgar indique el sentido de **S** y en este caso es antihorario, de tal manera que se genera un flujo magnético inducido que contrarresta el cambio inicial. Sería más sencillo de razonar si elegimos el vector **S** que salga del papel y es un buen entrenamiento comprobar que siempre tiene que salir lo mismo. *b*) La superficie de la espira circular es

$$S = \pi r^2 = \pi \cdot 0,05^2 \text{ m}^2$$

el flujo es

$$\phi = BS\cos 180^\circ = -B\pi \cdot 0,05^2 \text{ Wb}$$

y la fuerza electromotriz es:

$$\mathcal{E}_{\mathrm{m}} = -\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = -\frac{\phi_{\mathrm{f}} - \phi_0}{\Delta t} =$$

$$= -\frac{-0,2\cdot\pi\cdot 0,05^2 - (-0,5\cdot\pi\cdot 0,05^2)}{0,1} = -\frac{0,3\cdot\pi\cdot 0,05^2}{0,1} = -0,024 \text{ V}$$

Si el campo aumentara el sentido de la corriente sería al revés que antes, el de las agujas del reloj y la fuerza electromotriz valdría 0,024 V. El signo menos en la ecuación Faraday-Lenz solo indica que la corriente inducida se opone al cambio introducido en el sistema, pero realmente el signo en el resultado no significa nada. De hecho si elegimos el sentido del vector **S** al revés, hacia afuera, los signos de la fuerza electromotriz salen al revés.

21. *a*) Escriba la expresión de la fuerza electromotriz inducida en una espira bajo la acción de un campo magnético y explique el origen y las características de dicha fuerza electromotriz. *b*) Si la espira se encuentra en reposo, en un plano horizontal, y el campo magnético es vertical y hacia arriba, indique en un esquema el sentido de la corriente que circula por la espira: *i*) si aumenta la intensidad del campo magnético; *ii*) si disminuye dicha intensidad.

22. Una espira cuadrada de 5 cm de lado se encuentra en el interior de un campo magnético uniforme, de dirección normal al plano de la espira y de intensidad variable con el tiempo: $B = 2t^2$ T. *a*) Deduzca la expresión del flujo magnético a través de la espira en función del tiempo. *b*) Represente gráficamente la fuerza electromotriz inducida en función del tiempo y calcule su valor para $t = 4$ s.

    Solución. *a*) Elegimos el vector **S** con el mismo sentido que el campo magnético por lo que el flujo magnético es:

    $$\phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = BS \cos 0 = 2t^2 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3} = 5 \cdot 10^{-3} t^2 \text{ T m}^2$$

    b) La fuerza electromotriz inducida es:

    $$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(5 \cdot 10^{-3} t^2) = -10^{-2} t \text{ V}$$

    y a los 4 s vale:

    $$\mathcal{E}(4) = -10^{-2} \cdot 4 = -4 \cdot 10^{-2} \text{ V}$$

    Como la variable independiente está elevada a uno su gráfica es una recta (es una función lineal) y con representar dos puntos ya tenemos suficiente: $\mathcal{E}(0) = 0$ y $\mathcal{E}(1) = -10^{-2}$ V. La gráfica se muestra en la figura 56 y los ejes no están a escala para que pueda verse.

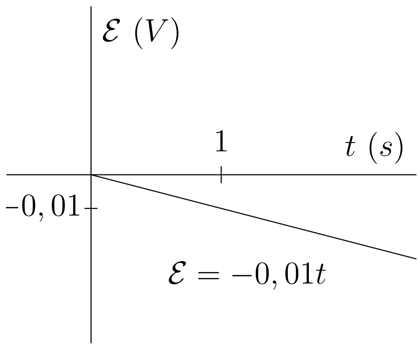

Figura 56:

23. Una espira de 20 cm^2 se sitúa en un plano perpendicular a un campo magnético uniforme de 0,2 T. *a*) Calcule el flujo magnético a través de la espira y explique cómo variaría el valor del flujo al girar la espira un ángulo de 60°. *b*) Si el tiempo invertido en el giro es de $2 \cdot 10^{-3}$ s, ¿cuánto vale la fuerza electromotriz media inducida en la espira? Explique qué habría ocurrido si la espira se hubiese girado en sentido contrario.

    Solución. *a*) Elegimos el vector **S** con el mismo sentido que el campo magnético. El flujo magnético inicial es:

    $$\phi_1 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = BS \cos 0 = 0,2 \cdot 20 \cdot 10^{-4} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ T m}^2$$

    y el final:

    $$\phi_2 = 4 \cdot 10^{-4} \cos 60^\circ = 2 \cdot 10^{-4} \text{ T m}^2$$

por lo que el flujo disminuye en: $\Delta\phi = -2 \cdot 10^{-4}$ T m^2 *b*) La fuerza electromotriz media es:

$$\mathcal{E}_{\mathrm{m}} = -\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = -\frac{-2 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10^{-3}} = 0,1 \text{ V}$$

y si la espira gira en sentido contrario no cambia nada.

24. Una espira cuadrada de 10 cm de lado, inicialmente horizontal, gira a 1200 revoluciones por minuto, en torno a uno de sus lados, en un campo magnético uniforme de 0,2 T, de dirección vertical. *a*) Calcule el valor máximo de la fuerza electromotriz inducida en la espira y represente, en función del tiempo, el flujo magnético a través de la espira y la fuerza electromotriz inducida. *b*) ¿Cómo se modificaría la fem inducida en la espira si se redujera la velocidad de rotación a la mitad? ¿Y si se invirtiera el sentido del campo magnético?

    Solución. *a*) Como la espira gira, el ángulo que forma con el campo cambia constantemente. Recordemos que la velocidad angular es la variación de la posición angular respecto al tiempo:

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt}$$

    y la variación de la posición angular es:

$$d\alpha = w dt \tag{15}$$

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} d\alpha = \int_{t_0}^{t} w dt$$

$$\alpha]_{\alpha_0}^{\alpha} = \int_{t_0}^{t} w dt$$

$$\alpha - \alpha_0 = \int_{t_0}^{t} w dt$$

    y en el caso general en que ω dependa del tiempo tenemos que integrar. Pero si ω, como en este caso, es constante podemos sacarla de la integral:

$$\alpha - \alpha_0 = \omega \int_{t_0}^{t} dt$$

$$\alpha - \alpha_0 = \omega(t - t_0)$$

    y si elegimos $t_0 = 0$:

$$\alpha = \omega t + \alpha_0$$

    También podemos deducirla a partir de la ecuación 15. Si ω es constante podemos usar incrementos en lugar de diferenciales:

$$\Delta\alpha = w\Delta t$$

$$\alpha - \alpha_0 = w(t - t_0)$$

$$\alpha = wt + \alpha_0$$

En nuestro caso, como la espira comienza perpendicular al campo, el vector **S** forma un ángulo de 0° con el campo por lo tanto $\alpha_0 = 0$ y como $\omega = 1200$ rpm $=$ 40π rad/s:

$$\alpha = 40\pi t + 0$$

Ahora ya podemos calcular el flujo magnético en función del tiempo:

$$\phi = BS\cos\alpha = 0,2 \cdot 0,01\cos 40\pi t = 0,002\cos 40\pi t \ \mathrm{T\cdot m^2}$$

(En el examen no tienes que justificar, como acabamos de hacer, que $\alpha = \omega t$ pero es importante que te haya quedado claro todo, te permite aclarar conceptos físicos y matemáticos muy importantes). La fuerza electromotriz instantánea es:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = 0,08\pi\,\mathrm{sen}\,40\pi t \ \mathrm{V}$$

y su valor máximo ocurre cuando el seno valga 1:

$$\mathcal{E}_{\text{máx}} = 0,08\pi \ \mathrm{V}$$

Las gráficas del seno y coseno son iguales, solo tenemos que ajustarlas en el tiempo (desplazarlas a la izquierda o la derecha) y marcar los puntos de corte con los ejes. Para el flujo, cuando t=0 tenemos un máximo. Averiguamos el tiempo para que la gráfica corte al eje horizontal:

$$40\pi t = \frac{\pi}{2}$$

$$t = \frac{1}{80} \ \mathrm{s}$$

Averiguamos el tiempo para llegar al mínimo:

$$40\pi t = \pi$$

$$t = \frac{1}{40} \ \mathrm{s}$$

y representamos la gráfica en la figura 57

Para la fuerza electromotriz, cuando t=0 esta vale 0. Averiguamos el tiempo para llegar al máximo:

$$40\pi t = \frac{\pi}{2}$$

$$t = \frac{1}{80} \ \mathrm{s}$$

Averiguamos el tiempo para que corte al eje horizontal:

$$40\pi t = \pi$$

$$t = \frac{1}{40} \ \mathrm{s}$$

y representamos la gráfica en la figura 57

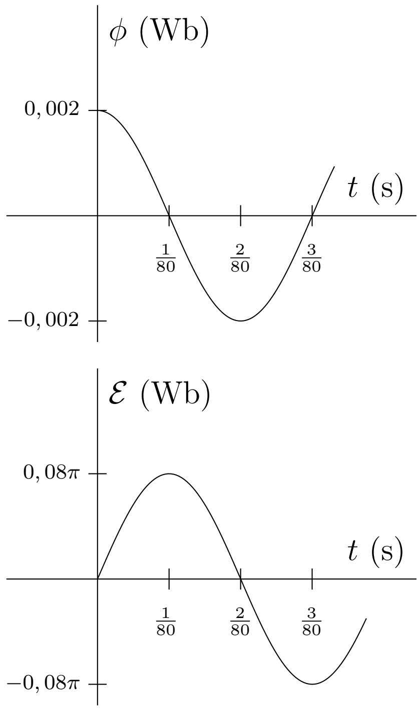

Figura 57:

Como vemos, cuando $t = \frac{1}{80}$ s es cuando más rápido disminuye el flujo y cuando más fuerza electromotriz se genera, conforme a la ley de Faraday. De igual manera, cuando $t = 0$ el flujo no cambia y no se genera corriente. *b*) Los nuevos valores son:

$$\phi = 0,2 \cdot 0,01 \cdot \cos 20\pi t = 0,002 \cdot \cos 20\pi t \text{ T} \cdot \text{m}^2$$

$$\mathcal{E} = \frac{d\phi}{dt} = -0,04\pi \operatorname{sen} 20\pi t \text{ V}$$

Como vemos, la fuerza electromotriz máxima se divide a la mitad y la frecuencia de la corriente alterna generada también. La frecuencia original es:

$$\omega = 2\pi\nu \ \Rightarrow \nu = \frac{40\pi}{2\pi} = 20 \text{ s}^{-1}$$

y la nueva 10 Hz. Si se invierte el campo la corriente va siempre en sentido contrario respecto a la situación inicial.

25. Una barra de cobre de 100 g y 20 cm de longitud se halla sobre una mesa horizontal de material aislante. El coeficiente de rozamiento entre la mesa y la barra es 0,2. *a*) Si se hace pasar por la barra una corriente de 10 A, ¿cuál es el campo magnético mínimo que se ha de aplicar verticalmente para que deslice la barra? *b*) Si la barra se moviese sobre la mesa con una velocidad de 30 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, ¿qué diferencia de potencial se induciría en ella suponiendo aplicado el campo magnético anterior? Dato: $g = 10 \ \text{m s}^{-2}$.

    Solución. *a*) La figura 58 muestra la situación (por claridad no se ha dibujado el campo magnético vertical hacia arriba). Como el campo magnético y la barra

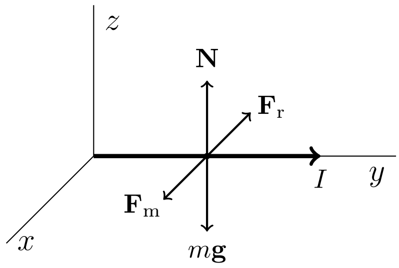

Figura 58:

delimitan un plano vertical la fuerza magnética es horizontal:

$$\frac{\mathbf{F}_{\rm m}}{l} = I\mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

$$F_{\rm m} = IBl$$

La fuerza de rozamiento máxima es:

$$F_{\rm r} = \mu N = \mu mg$$

En el equilibrio:

$$IBl = \mu mg \;\Rightarrow B = \frac{\mu mg}{Il} = \frac{0,2 \cdot 0,1 \cdot 10}{10 \cdot 0,2} = 0,1 \text{ T}$$

por lo que el campo tiene que se mayor que 0,1 T.

26. *a*) Explique el funcionamiento de un transformador eléctrico. *b*) Comente las ventajas de la corriente alterna frente a la corriente continua.

Solución. *a*) La figura 59 muestra el esquema de un transformador. Alrededor de

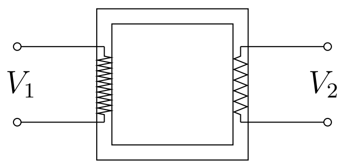

Figura 59:

un núcleo de hierro se arrollan dos bobinas con diferente número de espiras. El circuito primario recibe la corriente alterna de entrada y el secundario ofrece la corriente alterna de salida con el voltaje modificado. El primario, conforme a la ley de Biot-Savart, induce un campo magnético variable, que a su vez genera un flujo magnético variable y se cumple la ley de Faraday:

$$V_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt}$$

donde N_1 es el número de espiras. El flujo magnético recorre el núcleo de hierro y en el secundario induce una corriente alterna conforme a la ley de Faraday:

$$V_2 = N_2 \frac{d\phi}{dt}$$

Como el flujo es el mismo:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{V_1}{N_1} \qquad \frac{d\phi}{dt} = \frac{V_2}{N_2}$$

$$\frac{V_1}{N_1} = \frac{V_2}{N_2}$$

$$V_2 = \frac{N_2}{N_1} V_1$$

y conseguimos variar el voltaje modificando la relación entre el número de espiras. Para evitar pérdidas de energía por corrientes de Foucault o turbillonarias el núcleo no es macizo sino laminado, pues evita su formación al cortar su trayectoria. *b*) La corriente alterna tiene dos ventajas sobre la continua. La primera es que se puede variar su voltaje con apenas pérdidas de energía con el transformador eléctrico. La segunda es que se puede transmitir a largas distancias con pocas pérdidas de energía usando altos voltajes. La potencia total de un circuito es:

$$P = IV$$

y la pérdida de potencia por efecto Joule (rozamiento de los electrones en el conductor) es:

$$P_\mathrm{J} = I^2 R$$

Por tanto, para una potencia dada, si elevamos el voltaje se reduce la intensidad, y conseguimos minimizar la pérdida de energía por efecto Joule. En la central eléctrica se eleva el voltaje a, por ejemplo 400 kV, y se transmite con pocas pérdidas y al llegar al lugar de consumo se reduce su voltaje por seguridad al mínimo necesario, hogares a 230 V (antiguamente 220), industria a 380 V, trenes a 15 kV, etc.

27. Razone si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones: *a*) La fuerza electromotriz inducida en una espira es proporcional al flujo magnético que la atraviesa. *b*) Un transformador eléctrico no puede utilizarse con corriente continua.

    Solución. *a*) Es falsa puesto que es proporcional a la velocidad de variación del flujo, como muestra la ley de Faraday $\mathcal{E} = \frac{d\phi}{dt}$. *b*) Es verdadera porque la corriente continua en el primario produce un flujo constante a través del núcleo del transformador que no induce un voltaje en el secundario. Hasta aquí la respuesta canónica (la que se espera que se conteste), pero hemos visto en el laboratorio la bobina o carrete Ruhmkorff y podemos ampliar la respuesta: el transformador con continua sí funcionaría pero solo al cerrar o abrir el circuito y de este modo no resulta práctico para un funcionamiento continuo. No obstante para determinados usos sí valdría. Por ejemplo los coches de gasolina tienen un circuito auxiliar de corriente continua a 12 V con una batería de plomo. Este circuito hace funcionar las luces, el motor de arranque, etc. y hace que salte la chispa en las bujias para que explote la gasolina en el cilindro. Pero para ello debe elevar el voltaje a 5000 V mediante una bobina Ruhmkorff (lo hace a pulsos, conforme se interrumpe y reanuda la corriente).

VIBRACIONES Y ONDAS

1. Una partícula de 0,5 kg, que describe un movimiento armónico simple de frecuencia $5/\pi$ Hz, tiene inicialmente una energía cinética de 0,2 J y una energía potencial de 0,8 J. *a*) Calcule la posición y velocidad inicial, así como la amplitud de la oscilación y la velocidad máxima. *b*) Haga un análisis de las transformaciones de energía que tienen lugar en un ciclo completo. ¿Cuál sería el desplazamiento en el instante en que las energías cinética y potencial son iguales?

Solución. *a*) La frecuencia angular es

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi\frac{5}{\pi} = 10\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

En el MAS se cumple que:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

por lo que la constante del muelle vale

$$k = \omega^2 m = 10^2 \cdot \frac{1}{2} = 50\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

La energía potencial es:

$$E_\text{p} = \frac{1}{2}kx^2$$

por lo que la posición inicial es:

$$x = \sqrt{\frac{2E_\text{p}}{k}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0,8}{50}} = 0,17\ \text{m}$$

La energía mecánica es la energía potencial máxima por lo que:

$$E_\text{m} = \frac{1}{2}kA^2$$

$$A = \sqrt{\frac{2E_\text{m}}{k}} = \sqrt{\frac{2\cdot(0,2+0,8)}{50}} = 0,2\ \text{m}$$

La velocidad inicial es:

$$v = \sqrt{\frac{2E_\text{c}}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0,2}{0,5}} = 0,89\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

y la máxima:

$$v = \sqrt{\frac{2E_\text{m}}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot(0,2+0,8}{0,5}} = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) Supongamos, como se muestra en la figura 60, que comenzamos a estudiar el movimiento en un extremo. Como es un MAS la fuerza cumple la ley de Hooke, que es una fuerza conservativa por lo que se conserva la energía mecánica. Así, en un extremo toda la energía mecánica es potencial y conforme se acerca al punto de equilibrio se va transformando la potencial en cinética y cuando pase por el

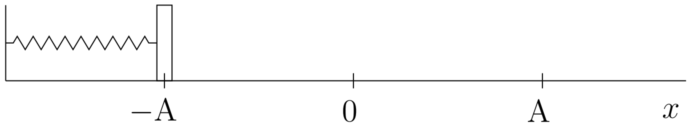

Figura 60:

punto de equilibrio solo hay energía cinética. Conforme se acerque al otro extremo, ocurre justo al revés y la cinética se transforma en potencial. El desplazamiento cuando la cinética es igual a la potencial es:

$$x = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,5}{50}} = 0,14 \text{ m}$$

2. Un resorte vertical se alarga 2 cm cuando se cuelga de su extremo inferior un cuerpo de 10 kg. Se desplaza dicho cuerpo hacia abajo y se suelta, de forma que el sistema comienza a oscilar con una amplitud de 3 cm. *a*) Calcule la constante recuperadora del resorte y el periodo del movimiento. *b*) Haga un análisis de las transformaciones energéticas que tienen lugar en una oscilación completa y calcule el valor de las energías cinética y potencial elástica cuando el desplazamiento es de 1,3 cm.

   Solución. *a*) Cuando se cuelga el cuerpo y el muelle se alarga 2 cm, como se muestra en la figura 61, el peso y la fuerza que ejerce el muelle son iguales en

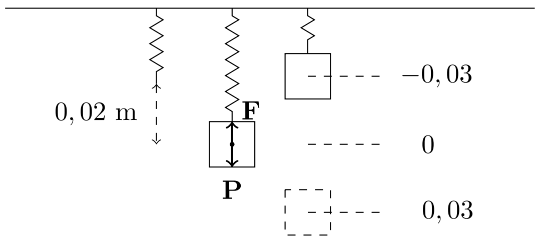

Figura 61:

   módulo:

$$kx = mg \Rightarrow k = \frac{mg}{x} = \frac{10 \cdot 9,8}{0,02} = 4900 \text{ N m}^{-1}$$

   Una vez tenemos la constante del muelle obtenemos el periodo:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{k}{m} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2 m}{k}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot 10}{4900}} = 0,28 \text{ s}$$

   b) Como solo actúan fuerzas conservativas la energía mecánica se conserva. En un extremo toda la energía mecánica es potencial y conforme se acerca al punto de equilibrio se va transformando en cinética. En el punto de equilibrio toda la energía mecánica es cinética. Una vez sobrepase el punto de equilibro hacia el otro extremo la energía cinética se va transformando en potencial. En el otro extremo toda la energía es potencial. Al invertirse el movimiento se repite esta secuencia de transformación de energía hasta completar un ciclo completo al regresar al primer extremo. La energía mecánica vale:

$$E_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}4900 \cdot 0,03^2 = 2,205 \text{ J}$$

y la potencial:

$$E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}4900 \cdot 0,013^2 = 0,41 \text{ J}$$

por lo que la cinética es:

$$E_{\mathrm{c}} = E_{\mathrm{m}} - E_{\mathrm{p}} = 2,205 - 0,41 = 1,795 \text{ J}$$

3. Un objeto de 0,2 kg, unido al extremo de un resorte, efectúa oscilaciones armónicas de 0,1·π s de período y su energía cinética máxima es de 0,5 J. *a*) Escriba la ecuación de movimiento del objeto y determine la constante elástica del resorte. *b*) Explique cómo cambiarían las características del movimiento si: *i*) se sustituye el resorte por otro de constante elástica doble; *ii*) se sustituye el objeto por otro de masa doble.

   Solución. *a*) Como realiza oscilaciones armónicas se trata de un MAS. La frecuencia angular es:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,1\pi} = 20 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

   La constante elástica del resorte es:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow k = \omega^2 m = 20^2 \cdot 0,2 = 80 \text{ N m}^{-1}$$

   La energía mecánica es igual a la cinética máxima:

$$E_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{1}{k}} = \sqrt{\frac{1}{80}} = 0,11 \text{ m}$$

   La ecuación del movimiento es:

$$x = A\cos(\omega t + \delta_0) \tag{16}$$

   Elegimos el caso más sencillo de que la fase inicial valga cero. Eso significa que empezamos a estudiar el movimiento cuando el objeto se encuentra en el extremo positivo, donde $x = A$. Por tanto la ecuación es:

$$x = 0,11\cos 20t$$

   b) *i*) Al variar la constante del muelle se modificará la frecuencia angular. La frecuencia original es:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

y la modificada:

$$\omega' = \sqrt{\frac{k'}{m}} = \sqrt{\frac{2k}{m}} = \sqrt{2}\omega$$

por lo que la frecuencia aumenta en el factor 1,4142. Suponemos que la energía mecánica no cambia, por lo que se modificará la amplitud. La amplitud original es:

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}KA^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2E_\mathrm{m}}{K}}$$

y la modificada:

$$A' = \sqrt{\frac{2E_\mathrm{m}}{K'}} = \sqrt{\frac{2E_\mathrm{m}}{2K}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2E_\mathrm{m}}{K}} = \frac{\sqrt{2}}{2}A$$

por lo que la amplitud disminuye en el factor 0,707. Ambos resultados concuerdan con la experiencia puesto que al poner un muelle más fuerte el movimiento ocurre con mayor frecuencia y menor amplitud. *ii)* Al sustituir el objeto por otro de masa doble:

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m'}} = \sqrt{\frac{k}{2m}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\omega$$

la frecuencia angular disminuye en el factor 0,707, algo esperable puesto que el sistema tiene más inercia. La amplitud no se modifica puesto que no depende de la masa y suponemos que la energía no varía.

4. Dos fenómenos físicos vienen descritos por las expresiones $y = A\,\mathrm{sen}(bt)$ e $y = A\,\mathrm{sen}(bt - cx)$, en las que x e y son coordenadas espaciales y t el tiempo. *a*) Explique de qué tipo de fenómeno físico se trata en cada caso e identifique los parámetros que aparecen en dichas expresiones, indicando sus respectivas unidades. *b*) ¿Qué diferencia señalaría respecto de la periodicidad de ambos fenómenos?

Solución. *a*) La primera expresión pertenece a un MAS y la segunda a una onda armónica. En ambas expresiones y es la distancia que se separa del equilibrio (se mide en metros), A es la amplitud del movimiento (se mide en metros) y b es la frecuencia angular (se mide en radianes por segundo). En la segunda expresión c es el número de onda (se mide en m^{-1}), x es la posición por la que se propaga la onda (se mide en metros) y el signo indica el sentido de su propagación, el negativo indica que se propaga en sentido creciente del eje OX. *b*) La diferencia es que el MAS es periódico con respecto al tiempo y la onda es doblemente periódica, con respecto al tiempo y al espacio. La figura 62 muestra, para un MAS, cómo varía la posición y respecto al equilibrio conforme pasa el tiempo y la figura 60 muestra el movimiento real del sistema (nombra el desplazamiento x en lugar de y). Para una onda la figura 63 muestra, para un instante de tiempo, cómo varía la posición y al movernos por la dirección de propagación OX. Como la magnitud y es una distancia también representa la forma real de la onda (por ejemplo una onda en una cuerda o en el agua) para un instante de tiempo, por lo tanto se trata de una fotografía de la onda. Conforme pase el tiempo la onda se desplaza hacia la izquierda. Sin embargo la figura 62 representa, para una posición fija de x, cómo varía y conforme pasa el tiempo. Ambas gráficas muestran la doble periodicidad de las ondas. Por tanto el movimiento ondulatorio es la suma de muchos MAS sincronizados de igual manera que la ola en un estadio

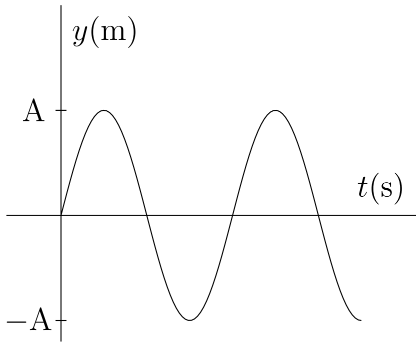

Figura 62:

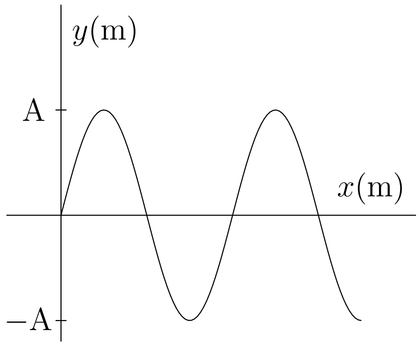

Figura 63:

5. Considere la ecuación de onda $y(x,t) = A\,\mathrm{sen}(bt - cx)$. *a*) ¿Qué representan los coeficientes A, b y c? ¿Cuáles son sus unidades? *b*) ¿Qué cambios supondría que la función fuera coseno en lugar de seno? ¿Y que el signo dentro del paréntesis fuera $+$ y no $-$?

   Solución. *a*) El coeficiente A es la amplitud (se mide en metros), b es la frecuencia angular (se mide en rad/s) y c es el número de onda (se mide en m^{-1}). *b*) Si la función fuera coseno solo cambia la fase inicial que sería $\delta_0 = \frac{\pi}{2}$ y así:

$$y(x,t) = A\,\mathrm{sen}(bt - cx) = A\cos(bt - cx + \frac{\pi}{2})$$

   Y si el signo es positivo la onda se desplaza hacia el sentido decreciente del eje OX.

6. El periodo de una onda que se propaga a lo largo del eje x es de $3 \cdot 10^{-3}$ s y la distancia entre los dos puntos más próximos, cuya diferencia de fase es $\pi/2$ radianes, es de 20 cm. *a*) Calcule la longitud de onda y la velocidad de propagación. *b*) Si el periodo se duplicase, ¿qué le ocurriría a las magnitudes del apartado anterior?

   Solución. *a*) La figura 64 muestra la situación descrita y por tanto la longitud de onda es$\lambda = 0,2 \cdot 4 = 0,8$ m y la velocidad es:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{0,8}{3 \cdot 10^{-3}} = 266,6 \text{ m s}^{-1}$$

   b) Si se duplica el periodo la longitud de onda no se modifica y la velocidad se reduce a la mitad puesto que el periodo está en el denominador.

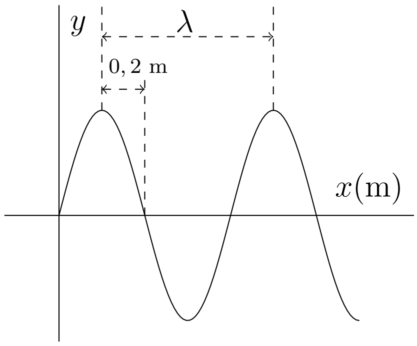

Figura 64:

7. La ecuación de una onda transversal que se propaga por una cuerda es $y(x,t) = 0,06\cos 2\pi(4t-2x)$, (SI). *a*) Calcule la diferencia de fase entre los estados de vibración de una partícula de la cuerda en los instantes $t = 0$ y $t = 0,5$ s. *b*) Haga una representación gráfica aproximada de la forma que adopta la cuerda en los instantes anteriores.

   Solución. *a*) La fase es $\delta = 8\pi t - 4\pi x$ y como nos preguntan por una partícula de la cuerda, x no varía y podemos ahorrarnos trabajo:

$$\Delta\delta = 8\pi \cdot 0,5 = 4\pi \text{ rad}$$

   por lo que han pasado dos ondas completas. *b*) La gráfica es la misma en los dos instantes porque hemos visto que la diferencia de fase es 4π. Averigüemos los puntos de corte para $t = 0$. El signo menos en la fase indica que la onda se desplaza hacia el sentido creciente del eje OX por lo que podemos prescindir de él al hallar los puntos de corte y, si lo tenemos en cuenta lo que ocurre es que la fase va hacia valores negativos:

$$-4\pi x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{8} \text{ m}$$

$$-4\pi x = -\pi \Rightarrow x = \frac{1}{4} = \frac{2}{8} \text{ m}$$

$$-4\pi x = \frac{-3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{8} \text{ m}$$

$$-4\pi x = -2\pi \Rightarrow x = \frac{1}{2} = \frac{4}{8} \text{ m}$$

   y representamos la función en la figura 65.

8. Una onda estacionaria tiene por ecuación $y(x,t) = 10\cos(\frac{\pi}{6}x)\operatorname{sen}(10\pi t)$, (SI). *a*) Calcule las características de las ondas cuya superposición da lugar a la onda dada. *b*) ¿Cuál sería la velocidad de la partícula situada en la posición $x = 3$ m? Comente el resultado.

   Solución. *a*) La ecuación de una onda estacionaria es:

$$y = 2A \operatorname{sen} kx \cos wt$$

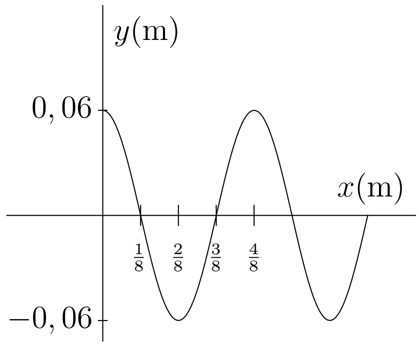

Figura 65:

si proviene de la interferencia de las ondas:

$$y_1 = A \operatorname{sen}(kx + \omega t) \text{ y } y_2 = A \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

o

$$y = 2A \cos kx \operatorname{sen} wt$$

si proviene de la interferencia de las ondas:

$$y_1 = A \operatorname{sen}(\omega t + kx) \text{ y } y_2 = A \operatorname{sen}(\omega t - kx)$$

donde en ambos casos usamos la igualdad:

$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2 \cos \frac{a-b}{2} \operatorname{sen} \frac{a+b}{2}$$

Por tanto las ondas libres tienen una amplitud de 5 metros, un número de onda de $\frac{\pi}{6}$ m^{-1} y una frecuencia angular de 10π rad/s. *b*) Cada punto de la cuerda se mueve conforme a un MAS y nos preguntan por la velocidad de oscilación del punto $x = 3$ m. Al sustituir en la ecuación vemos que $y = 0$ en todo momento por lo que dicho punto es un nodo y por tanto tiene velocidad cero. Además en él la cuerda no vibra y por tanto no permite la transmisión de energía.

9. La ecuación de una onda es $y(x, t) = 4 \operatorname{sen}(6t - 2x + \pi/6)$, (SI). *a*) Explique las características de la onda y determine la elongación y la velocidad, en el instante inicial, en el origen de coordenadas. *b*) Calcule la frecuencia y la velocidad de propagación de la onda, así como la diferencia de fase entre dos puntos separados 5 m en un mismo instante.

   Solución. *a*) La onda tiene una amplitud de 4 metros, un número de onda de 2 m^{-1}, una frecuencia angular de 6 rad/s y se desplaza hacia el sentido positivo del eje OX. Cada punto del medio material experimenta un MAS. La ecuación del MAS para el origen de coordenadas es:

$$y(t) = 4 \operatorname{sen}(6t + \pi/6)$$

   y la elongación es:

$$y = 4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = 2 \text{ m}$$

Para la velocidad derivamos y sustituimos:

$$v_y = 24 \cos \frac{\pi}{6} = 20,78 \text{ m s}^{-1}$$

b) La frecuencia es:

$$\omega = 6 \text{ rad s}^{-1}$$

$$2\pi\nu = 6 \text{ m s}^{-1} \Rightarrow \nu = \frac{3}{\pi} \text{ H}z$$

y la velocidad:

$$k = 2 \text{ m}^{-1}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} = 2 \text{ m}^{-1} \Rightarrow \lambda = \pi \text{ m}$$

$$v = \lambda\nu = \pi\frac{3}{\pi} = 3 \text{ m s}^{-1}$$

Elegimos por simplicidad el origen de coordenadas como punto inicial:

$$\Delta\delta = \delta_{\text{f}} - \delta_0 = (6t - 2 \cdot 5 + \pi/6) - (6t - 2 \cdot 0 + \pi/6) = -10 \text{ rad}$$

10. La ecuación de una onda en una cuerda es $y(x,t) = 0,2 \operatorname{sen}(6\pi x)\cos(20\pi t)$, (SI). *a*) Explique las características de la onda y calcule su periodo, longitud de onda y velocidad de propagación. *b*) Determine la distancia entre dos puntos consecutivos con amplitud cero e indique el nombre y las características de dichos puntos.

    Solución. *a*) No es una onda sino una onda estacionaria formada por la superposición de dos ondas iguales que viajan en sentido contrario. Al no ser una onda no transmite energía. Los nodos son puntos que no vibran y la causa de que no transmita energía. La ecuación de una onda estacionaria es:

$$y = 2A \operatorname{sen} kx \cos wt$$

y proviene de la interferencia de las ondas:

$$y_1 = A \operatorname{sen}(kx + \omega t) \text{ y } y_2 = A \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

donde usamos la igualdad:

$$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = 2 \cos \frac{a-b}{2} \operatorname{sen} \frac{a+b}{2}$$

Por tanto las ondas que la crean tienen $A = 0,1$ m, $k = 6\pi$ m^{-1} y $\omega = 20\pi$ rad/s por lo que su periodo es:

$$\omega = 20\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = 20\pi \Rightarrow T = \frac{1}{10} \text{ s}$$

su longitud de onda es:

$$k = 6\pi \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3} \text{ m}$$

y su velocidad es:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{10}} = \frac{10}{3} \text{ m s}^{-1}$$

b) Los puntos de amplitud cero se encuentran en posiciones en la que el seno se anula y los dos primeros son:

$$6\pi x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$6\pi x = \pi \Rightarrow x = \frac{1}{6}\ \mathrm{m}$$

por lo que la distancia entre ellos es $\frac{1}{6}$ m. Se llaman nodos, no vibran, por lo que tienen amplitud cero, y por ello impiden la transmisión de energía

11. Se hace vibrar una cuerda de guitarra de 0,4 m de longitud, sujeta por los dos extremos. a) Calcule la frecuencia fundamental de vibración, suponiendo que la velocidad de propagación de la onda en la cuerda es de 352 m s^{-1}. b) Explique por qué, si se acorta la longitud de una cuerda en una guitarra, el sonido resulta más agudo.

    Solución. a) La figura 66 muestra los tres primeros armónicos. Vemos que la

    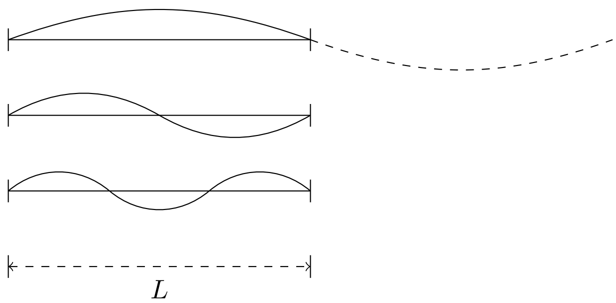

    Figura 66: Ondas estacionarias

    longitud de onda del primero necesita dos segmentos (se muestra a trazos la mitad de onda que falta), el segundo uno y el tercero dos tercios:

$$\lambda_1 = 2L,\ \ \lambda_2 = L,\ \ \lambda_3 = \frac{2}{3}L$$

    por lo que para un armónico n-ésimo se cumple que $\lambda_n = \frac{2}{n}L$, donde $n = 1, 2, 3, ...$ Por tanto la longitud de onda para el estado fundamental de vibración es $\lambda_1 = 2L$ y su frecuencia es:

$$v = \lambda\nu \Rightarrow \nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{352}{2 \cdot 0,4} = 440\ \mathrm{Hz} \tag{17}$$

    que se corresponde con la nota musical la. b) Como vemos en 17 si disminuimos la longitud, al estar en el denominador, aumenta la frecuencia. Por eso, en una guitarra, una nota pulsada siempre suena más aguda que tocada al aire.

LA LUZ Y LAS ONDAS ELECTROGNÉTICAS

1. El espectro visible contiene frecuencias entre $4 \cdot 10^{14}$ Hz y $7 \cdot 10^{14}$ Hz. a) Determine las longitudes de onda correspondientes a dichas frecuencias en el vacío. b) ¿Se modifican estos valores de las frecuencias y de las longitudes de onda cuando la luz

se propaga por el agua? En caso afirmativo, calcule los valores correspondientes (índice de refracción del agua respecto al aire: $n = 1,3$). Dato: $c = 3 \cdot 10^8$ m s^{-1}.

Solución. a) La luz es una onda electromagnética y en el vacío se desplaza a la velocidad c y cumple que $c = \lambda\nu$, por lo que las longitudes pedidas son:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{3 \cdot 10^8}{4 \cdot 10^{14}} = 7,5 \cdot 10^{-7} \text{ m} \qquad \lambda_2 = \frac{3 \cdot 10^8}{7 \cdot 10^{14}} = 4,30 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

b) Cuando la luz cambia de medio su frecuencia permanece constante. El índice de refracción es la relación entre la velocidad de la luz en el vacío y en el medio

$$n = \frac{c}{v}$$

por lo que en el agua se desplaza más despacio:

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,33} = 2,26 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

y por tanto, las nuevas longitudes de onda son:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{2,26 \cdot 10^8}{4 \cdot 10^{14}} = 5,65 \cdot 10^{-7} \text{ m} \qquad \lambda_2 = \frac{2,26 \cdot 10^8}{7 \cdot 10^{14}} = 3,23 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

y también disminuyen respecto al vacío. También podríamos calcularlo así:

$$n = \frac{c}{v} = \frac{\lambda\nu}{\lambda'\nu} = \frac{\lambda}{\lambda'} \tag{18}$$

donde λ' es la longitud de onda en el agua.

2. Un rayo de luz amarilla, emitida por una lámpara de sodio, tiene una longitud de onda en el vacío de $580 \cdot 10^{-9}$ m. a) Determine la velocidad de propagación y la longitud de onda de dicha luz en el interior de una fibra de cuarzo, cuyo índice de refracción es $n = 1,5$. b) ¿Pueden existir valores del ángulo de incidencia para los que un haz de luz, que se propaga por el interior de una fibra de cuarzo, no salga al exterior? Explique el fenómeno y, en su caso, calcule los valores del ángulo de incidencia para los cuáles tiene lugar. Dato: $c = 3 \cdot 10^8$ m s^{-1}.

   Solución. a) El índice de refracción es la relación entre la velocidad de la luz en el vacío y en el medio:

   $$n = \frac{c}{v}$$

   por lo que la velocidad en el cuarzo es:

   $$v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,5} = 2 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

   Usando la ecuación 18 calculamos la longitud de onda en el cuarzo:

   $$\lambda' = \frac{580 \cdot 10^{-9}}{1,5} = 3,87 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

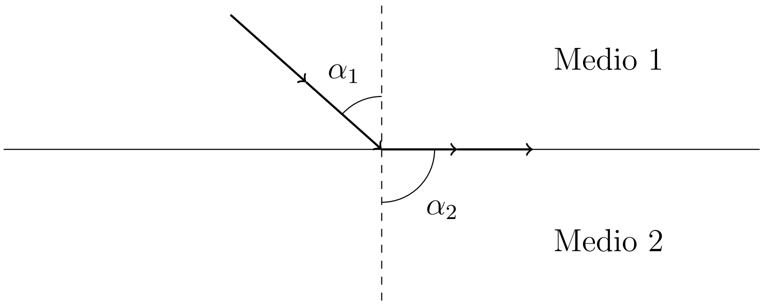

Figura 67: Reflexión total

b) Cuando la luz cambia de medio, ésta experimenta reflexión y refracción. En la figura 67 el medio 1 es el cuarzo y el 2 el exterior, habitualmente el aire y que podemos aproximar al vacío. La refracción cumple la ley de Snell:

$$n_1 \operatorname{sen} \alpha_1 = n_2 \operatorname{sen} \alpha_2 \tag{19}$$

Si el ángulo de salida α_2 en la refracción es recto, no se produce ésta y solo se produce reflexión, que llamamos reflexión total y el rayo se refleja con el mismo ángulo con el que incide. Imponemos la condición a la ley de Snell 19:

$$n_1 \operatorname{sen} \alpha_1 = 1 \operatorname{sen} 90^\circ$$

y calculamos el ángulo límite:

$$\alpha_1 = \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{n_1} = \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{1,5} = 41,81^\circ$$

y si la luz incide con un ángulo mayor o igual a $41,81^\circ$ no saldrá al exterior.

3. *a*) Los rayos X, la luz visible y los rayos infrarrojos son radiaciones electromagnéticas. Ordénelos en orden creciente de sus frecuencias e indique algunas diferencias entre ellas. *b*) ¿Qué es una onda electromagnética? Explique sus características.

   Solución. *a*) En orden creciente de frecuencia tenemos: infrarrojos, luz visible y rayos X. Tienen la misma velocidad pero diferente frecuencia y longitud de onda, conforme a $c = \lambda\nu$. Los rayos X son peligrosos y tienen efecto acumulativo en el cuerpo humano. Por eso en medicina se reduce su uso al estrictamente necesario. Se usan en radiografías y en escáneres. El escáner, también llamado tomografía axial computerizada (TAC) permite la visión tridimensional del cuerpo radiando con rayos X y analizando las reflexiones. Su investigación fue financiada gracias a los beneficios que brindaban los Beatles a la compañía discográfica EMI. La luz visible no es peligrosa y de hecho permite la visión al impresionar la retina. Los infrarrojos se difractan con los objetos de una habitación y por eso los mandos a distancia los usan, porque así llegan fácilmente a los sensores de los aparatos.

   b) Una onda electromagnética está formada por dos ondas, una eléctrica y otra magnética, que se mueven juntas con sus planos de vibración mutuamente perpendiculares (figura 68). La magnitud perturbada en el espacio y en el tiempo

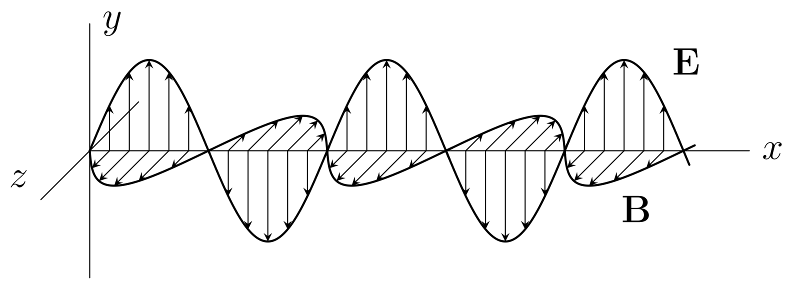

Figura 68: Onda electromagnética

es, en cada caso, el campo eléctrico y el magnético. Si la onda es armónica su ecuación es:

$$E = E_0 \operatorname{sen}(kx \mp \omega t + \delta_0)$$

$$B = B_0 \operatorname{sen}(kx \mp \omega t + \delta_0)$$

donde E_0 y B_0 son las amplitudes, k el número de onda, ω la frecuencia angular y δ_0 la fase inicial. Son ondas transversales porque la dirección de la perturbación es perpendicular a la de propagación. Se pueden polarizar, que significa que su plano de vibración se mantenga fijo. No necesitan medio material para transmitirse y por eso se transmiten a través del espacio vacío, como la luz que nos llega del Sol. Su velocidad en el vacío es un límite físico, nada puede moverse más rápido.

4. Un rayo de luz amarilla, emitido por una lámpara de vapor de sodio, posee una longitud de onda en el vacío de $5,9 \cdot 10^{-9}$ m. *a*) Determine la frecuencia, velocidad de propagación y longitud de onda de la luz en el interior de una fibra óptica de índice de refracción 1,5. *b*) ¿Cuál es el ángulo de incidencia mínimo para que un rayo que incide en la pared interna de la fibra no salga al exterior? ¿Cómo se denomina este ángulo? Dato: $c = 3 \cdot 10^8$ m s^{-1}.

   Solución. *a*) Hallamos la frecuencia de la luz, que es invariable:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \nu = \frac{3 \cdot 10^8}{5,9 \cdot 10^{-9}} = 5,08 \cdot 10^{16} \text{ Hz}$$

   La velocidad en el cuarzo es:

$$n = \frac{c}{v} \Rightarrow v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8}{\frac{3}{2}} = 2 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

   y la longitud de onda en el cuarzo es:

$$v = \lambda\nu \Rightarrow \lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{2 \cdot 10^8}{5,08 \cdot 10^{16}} = 3,94 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

   b) La figura 67 muestra un rayo que se transmite por la fibra (medio 1) y que se refracta con un ángulo recto al pasar al exterior (medio 2), lo que significa que no se produce refracción y solo ocurre reflexión, por lo que el rayo no sale al exterior. Despejamos en la ley de Snell:

$$n_1 \operatorname{sen} \alpha_1 = n_2 \operatorname{sen} \alpha_2$$

$$1,5\,\text{sen}\,\alpha_1 = 1\,\text{sen}\,90° \Rightarrow \alpha_1 = \text{arc sen}\,\frac{1}{1,5} = 41,81°$$

y este es el ángulo mínimo para que un rayo no salga de la fibra. Se llama ángulo límite. Para cualquier ángulo mayor o igual al límite el rayo no sale al exterior.

5. Una lámina plana de caras paralelas, de vidrio de índice de refracción 1,54 y de espesor 10 cm, está colocada en el aire. Sobre una de sus caras incide un rayo de luz con un ángulo de incidencia de 30°. *a*) Haga un esquema de la marcha del rayo y determine el tiempo que éste tarda en atravesar la lámina. *b*) ¿Con qué ángulo se refracta el rayo en la segunda cara? Compare este resultado con el ángulo de incidencia. Dato: $c = 3 \cdot 10^8$ m s^{-1}.

   Solución. En la primera cara el rayo, al pasar a un índice de refracción mayor, se acerca a la normal y en la segunda, al pasar a un índice de refracción menor, se aleja. Como existe simetría, el ángulo con el que se refracta en la segunda cara es el mismo con el que incide en la primera por lo que el rayo continúa su marcha en una dirección paralela, tal y como se muestra en la figura 69. No obstante

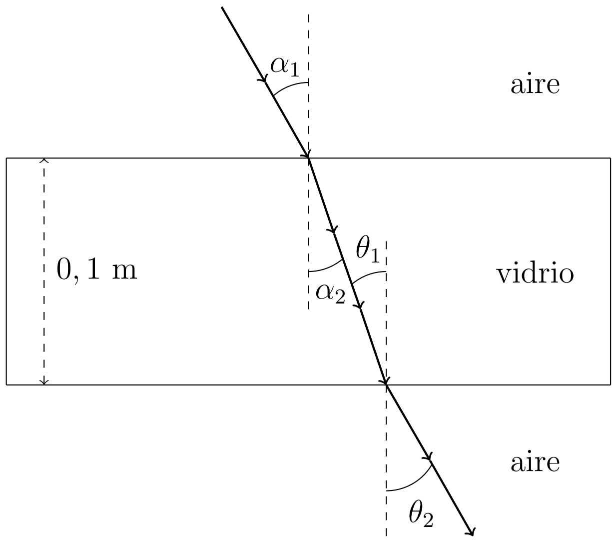

Figura 69: Lámina de caras paralelas

   comprobémoslo aplicando la ley de Snell a ambas refracciones:

$$n_1\,\text{sen}\,\alpha_1 = n_2\,\text{sen}\,\alpha_2$$

$$1\,\text{sen}\,30° = 1,54\,\text{sen}\,\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = \text{arc sen}\,\frac{0,5}{1,54} = 18,9459058°$$

$$n_1\,\text{sen}\,\theta_1 = n_2\,\text{sen}\,\theta_2$$

$$1,54\,\text{sen}\,18,96° = 1\,\text{sen}\,\theta_2 \Rightarrow \theta_2 = \text{arc sen}\,\frac{1,54\,\text{sen}\,18,96°}{1} = 30°$$

   El rayo recorre en el vidrio una distancia d:

$$\cos\alpha_2 = \frac{0,1}{d} \Rightarrow d = \frac{0,1}{\cos 18,9459058°} = 0,105727744 \text{ m}$$

con una velocidad:

$$n = \frac{c}{v} \Rightarrow v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,54} = 1,948051948 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

y emplea un tiempo:

$$v = \frac{d}{t} \Rightarrow t = \frac{d}{v} = \frac{0,105727744}{1,948051948 \cdot 10^8} = 5,4 \cdot 10^{-10} \text{ s}$$

En los cálculos intermedios hemos guardado todos lo decimales para poder obtener un resultado lo más preciso posible, pero en el resultado dejamos solo dos cifras significativas, de hecho, al darnos el dato de la velocidad de la luz con una sola cifra significativa deberíamos expresar la solución también con una sola cifra significativa, pero en 2° de bachillerato es suficiente con no expresar una solución con un número desorbitado de cifras significativas.

6. Una onda electromagnética armónica de 20 MHz se propaga en el vacío, en el sentido positivo del eje OX. El campo eléctrico de dicha onda tiene la dirección del eje OY y su amplitud es de $3 \cdot 10^{-3}$ N C^{-1}. *a*) Escriba la expresión del campo eléctrico $E(x,t)$, sabiendo que en $x = 0$ el valor de su módulo es cero cuando $t = 0$. *b*) Represente en una gráfica los campos $E(x,t)$ y $B(x,t)$ y la dirección de propagación de la onda. Dato: $c = 3 \cdot 10^8$ m s^{-1}.

   Solución. *a*) La ecuación de una onda eléctrica armónica es:

   $$E(x,t) = E_0 \operatorname{sen}(kx \mp \omega t + \delta_0)$$

   Hallamos la velocidad angular

   $$\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 20 \cdot 10^6 = 4\pi \cdot 10^7 \text{ rad s}^{-1}$$

   y el número de onda (sustituyendo $c = \lambda\nu$):

   $$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{4\pi \cdot 10^7}{3 \cdot 10^8} = \frac{4\pi}{30} = \frac{2\pi}{15} \text{ m}^{-1}$$

   La figura 68 muestra una posibilidad, que el campo valga cero y esté creciendo, en cuyo caso la fase inicial vale 0, y la otra posibilidad es que valga cero y esté decreciendo, en cuyo caso la fase inicial vale π rad, por lo que estas dos expresiones cumplen las condiciones iniciales indicadas:

   $$E(x,t) = 3 \cdot 10^{-3} \operatorname{sen}(\frac{2\pi}{15}x - 4\pi \cdot 10^7 t)$$

   $$E(x,t) = 3 \cdot 10^{-3} \operatorname{sen}(\frac{2\pi}{15}x - 4\pi \cdot 10^7 t + \pi)$$

   b) La figura 68 muestra la onda con el campo eléctrico en la dirección del eje OY, el campo magnético en la dirección del eje OZ y propagándose en la dirección del eje OX.

7. *a*) Describa brevemente el modelo corpuscular de la luz. ¿Puede explicar dicho modelo los fenómenos de interferencia luminosa? *b*) Dos rayos de luz inciden sobre un punto. ¿Pueden producir oscuridad? Explique razonadamente este hecho.

   Solución. *a*) Newton propuso, en el siglo XVII, el modelo corpúscular para explicar la naturaleza de la luz, en contraposición al modelo ondulatorio de Huygens y Hooks. El modelo corpuscular considera la luz formada por pequeños corpúsculos y permite explicar la transmisión en línea recta, la reflexión y la refracción pero no la difracción ni la interferencia, que son fenómenos tipicamente ondulatorios, por tanto el modelo corpuscular no permite explicar las interferencias luminosas. *b*) Si los focos son coherentes sí se puede producir oscuridad. Dos focos son coherentes si mantienen una diferencia de fase constante. Podemos obtener dos focos coherentes mediante dos rayos láser o separando un rayo en dos, como en el experimento de la doble rendija de Young. Una vez tengamos dos rayos coherentes, habrá puntos a los que llegue cada rayo en oposición de fase y por tanto se anulen sus campos eléctricos y magnéticos, produciendo oscuridad.

8. *a*) Indique qué se entiende por foco y por distancia focal de un espejo. ¿Qué es una imagen virtual? *b*) Con ayuda de un diagrama de rayos, describa la imagen formada por un espejo cóncavo para un objeto situado entre el centro de curvatura y el foco.

   Solución. *a*) El foco de un espejo cóncavo es el punto en el que convergen los rayos que llegan paralelos a él y en un espejo convexo es el punto del que divergen los rayos que llegan paralelos a él. La distancia focal es la distancia entre el foco f y el vértice V del espejo, tal y como se muestra en las figuras 70 y 71. Una

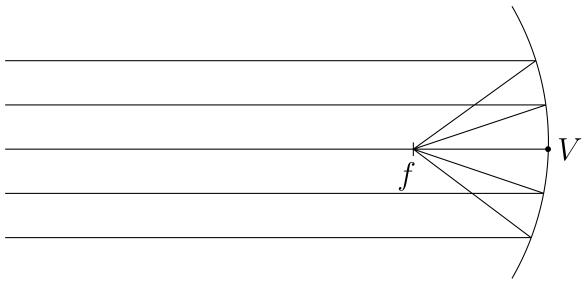

Figura 70: Espejo cóncavo

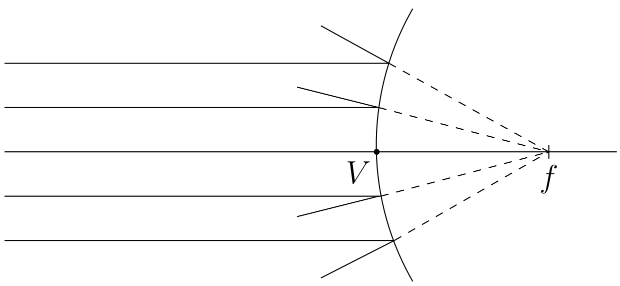

Figura 71: Espejo convexo

imagen virtual es aquella que no puede recogerse en una pantalla, como el caso de las imágnes formadas por un espejo convexo o uno cóncavo cuando el objeto está situado entre el foco y el vértice. *b*) El objeto recibe luz y la refleja en todas las direcciones pero con fijarnos tan solo en tres rayos ya podemos construir la imagen: el rayo paralelo al eje que se refleja pasando por el foco, el rayo que pasa por el foco y se refleja paralelo y el rayo que viene por el eje y se refleja en la misma dirección. Como vemos en la figura 72 la imagen es real, ampliada y presenta inversión vertical pero no lateral.

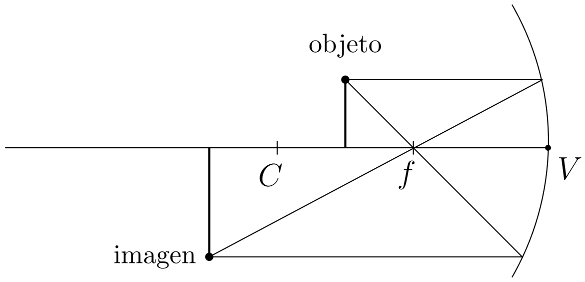

Figura 72: Espejo cóncavo

9. *a*) Si queremos ver una imagen ampliada de un objeto, ¿qué tipo de espejo tenemos que utilizar? Explique, con ayuda de un esquema, las características de la imagen formada. *b*) La nieve refleja casi toda la luz que incide en su superficie. ¿Por qué no nos vemos reflejados en ella?

   Solución. *a*) Tenemos que utilizar un espejo esférico cóncavo. Podemos situar el objeto entre el centro de curvatura y el foco, como se muestra en la figura 72 y obtenemos una imagen real, aumentada, con inversión vertical pero no lateral. La otra posibilidad es situar el objeto entre el foco y el vértice, como se muestra en la figura 73, y obtenemos una imagen virtual, aumentada y sin inversión vertical

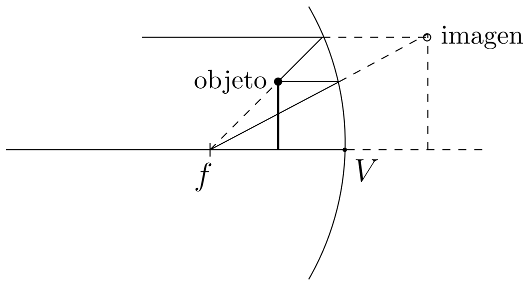

Figura 73: Espejo cóncavo

ni lateral. Aunque no nos lo preguntan veamos el resto de posibilidades que hay: si situamos el objeto a la izquierda del centro de curvatura la imagen se obtiene disminuida, como podemos comprobar en la figura 72 si consideramos que los rayos van al revés y por tanto el objeto está a la izquierda del centro. Si el objeto se sitúa justamente en el centro de curvatura la imagen tiene el mismo tamaño. *b*) Porque la nieve está formada por infinidad de trocitos de hielo que reflejan la luz en múltiples direcciones que impide que la luz se concentre en un punto para formar la imagen. Esta reflexión se llama difusa. Por contraposición la reflexión especular, como la de un espejo, sí permite la formación de imágenes puesto que todos los rayos que llegan con una misma dirección se reflejan también con la misma dirección, permitiendo la formación de imágenes.

10. *a*) Un objeto de 1,5 cm de altura está situado a 15 cm de un espejo esférico cóncavo de radio 20 cm. Determine la posición, tamaño y naturaleza de la imagen gráficamente y analíticamente. *b*) Ídem para un espejo convexo.

Solución. *a*) Con tan solo tres rayos podemos construir la imagen: el rayo paralelo al eje que se refleja pasando por el foco, el rayo que pasa por el foco y se refleja paralelo y el rayo que viene por el eje y se refleja en la misma dirección. Como vemos en la figura 72 la imagen es real, ampliada y presenta inversión vertical pero no lateral. Para calcularlo analíticamente usamo el criterio de signos según la norma DIN 1335: a la izquierda del vértice y por debajo del eje, los valores son negativos por lo que el radio es negativo. Obtenemos la distancia focal:

$$f = \frac{r}{2} = \frac{-0,2}{2} = -0,1 \text{ m}$$

El objeto se encuentra en $s = -0,15$. Despejamos y sustituimos en la ecuación de los espejos esféricos:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{s}$$

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{-0,1} - \frac{1}{-0,15}$$

En lugar de usar ya la calculadora, operamos las fracciones para no perder exactitud con números irracionales:

$$\frac{1}{s'} = \frac{-1}{\frac{1}{10}} + \frac{1}{\frac{15}{100}} = -10 + \frac{100}{15} = \frac{-150+100}{15} = \frac{-50}{15} = \frac{-10}{3}$$

$$s' = \frac{-3}{10} = -0,3 \text{ m}$$

y el resultado concuerda con la gráfica puesto que la imagen se forma a la izquierda del centro de curvatura. Obtenemos el tamaño:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{-0,3}{-0,15} = -2$$

por lo que la imagen tiene el doble de tamaño que el objeto y presenta inversión vertical, tal y como indica el signo menos y el tamaño de la imagen es de 3 cm. *b*) Un rayo que llega paralelo al espejo se refleja como si vinera desde el foco. Un rayo que se dirija hacia el foco se refleja paralelo. Al prolongar dichas reflexiones encontramos la imagen, como muestra la figura 74. Para la resolución analítica

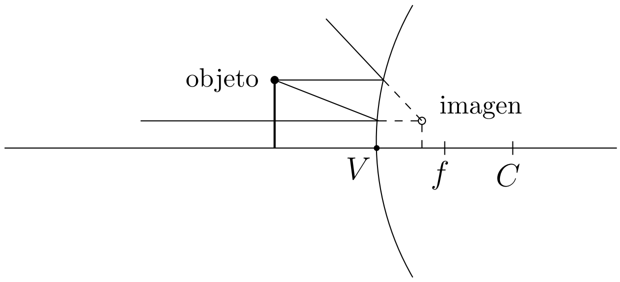

Figura 74: Espejo convexo

ahora el radio es positivo por lo que la ecuación de los espejos esféricos nos queda así:

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{s'}=\frac{1}{f}-\frac{1}{s}$$

$$\frac{1}{s'}=\frac{1}{0,1}-\frac{1}{-0,15}$$

En lugar de usar ya la calculadora, operamos las fracciones para no perder exactitud con números irracionales:

$$\frac{1}{s'}=\frac{1}{\frac{1}{10}}+\frac{1}{\frac{15}{100}}=10+\frac{100}{15}=\frac{150+100}{15}=\frac{250}{15}=\frac{50}{3}$$

$$s'=\frac{3}{50}=0,06 \text{ m}$$

y el resultado concuerda con la gráfica puesto que la imagen se forma a la derecha del espejo. Obtenemos el tamaño:

$$\frac{y'}{y}=-\frac{s'}{s}$$

$$\frac{y'}{y}=-\frac{0,06}{-0,15}=0,4$$

por lo que la imagen es disminuida y no presenta inversión vertical, tal y como indica el signo positivo y el tamaño de la imagen es:

$$y'=0,4y=0,4\cdot 0,015=0,006 \text{ m}$$

11. Un objeto se encuentra frente a un espejo plano a una distancia de 4 m del mismo. *a*) Construya gráficamente la imagen y explique sus características. Resuélvalo también analíticamente. *b*) Repita el apartado anterior si se sustituye el espejo plano por uno cóncavo de 2 m de radio.

    Solución. *a*) En un espejo plano el rayo incidente y el reflejado se encuentran en la misma dirección y la imagen obtenida es virtual, del mismo tamaño y presenta inversión lateral pero no vertical (figura 75). Para resolverlo analíticamente tenemos en cuenta que un espejo plano es un espejo esférico de radio infinito y la

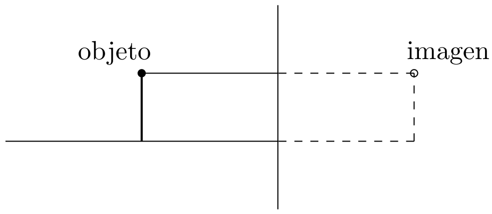

Figura 75: Espejo plano

ecuación de los espejos esféricos, con el criterio de signos de la norma DIN 1335, es:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 0$$

$$\frac{1}{s} = -\frac{1}{s'} \Rightarrow s' = -s = -(-4) = 4 \text{ m}$$

y concuerda con la construcción gráfica. *b*) El rayo paralelo se refleja pasando por el foco y el rayo que pasa por el foco se refleja paralelo (figura 76). La imagen es real, disminuida y presenta inversión vertical pero no lateral. Para calcularlo

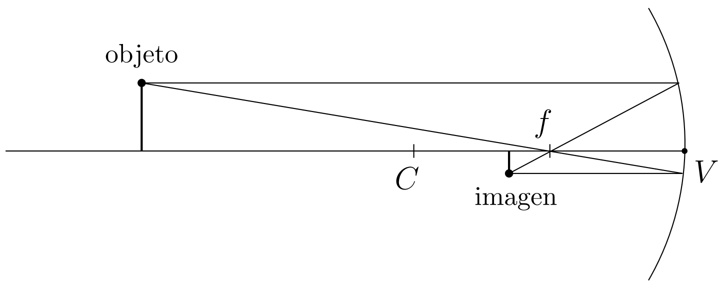

Figura 76: Espejo cóncavo

analíticamente usamo el criterio de signos según la norma DIN 1335: a la izquierda del vértice y por debajo del eje, los valores son negativos por lo que el radio es negativo. Obtenemos la distancia focal:

$$f = \frac{r}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \text{ m}$$

El objeto se encuentra en $s = -4$. Despejamos y sustituimos en la ecuación de los espejos esféricos:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{s}$$

$$\frac{1}{s'} = -1 - \frac{1}{-4} = -1 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$$

$$s' = -\frac{4}{3} = -1,33 \text{ m}$$

y el resultado concuerda con la gráfica puesto que la imagen se forma a la izquierda del foco. Obtenemos el tamaño:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{-\frac{4}{3}}{-4} = -\frac{1}{3}$$

por lo que la imagen tiene un tercio del tamaño del objeto y presenta inversión vertical, tal y como indica el signo menos.

12. Un objeto se encuentra a una distancia de 0,6 m de una lente delgada convergente de 0,2 m de distancia focal. *a*) Construya gráficamente la imagen que se forma y explique sus características. Resuélvalo también analíticamente. *b*) Repita el apartado anterior si el objeto se coloca a 0,1 m de la lente.

Solución. *a*) Un rayo paralelo al eje óptico se refracta pasando por el foco imagen f'). Un rayo que pasa por el foco objeto f se refracta paralelo y un rayo que pase por el eje óptico mantiene su dirección. Con estos tres rayos construimos la imagen en la figura 77. La imagen es real, disminuida, con inversión vertical pero

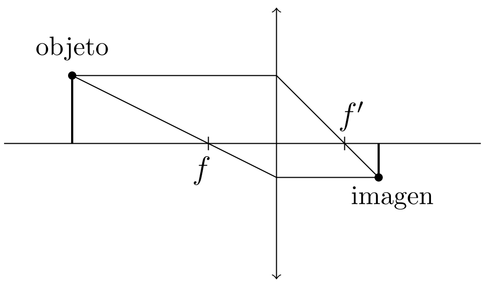

Figura 77: Lente convergente

no lateral. Para la resolución analítica usamos el criterio de signos de la norma DIN 1335 según el cual a la izquierda de la lente y por debajo del eje óptico las magnitudes son negativas. Por tanto $s = -0,6$ m, $f = -0,2$ m y $f' = 0,2$ m. La ecuación de las lentes delgadas es:

$$-\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'}$$

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{s}$$

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{0,2} + \frac{1}{-0,6}$$

$$\frac{1}{s'} = \frac{3-1}{0,6} = \frac{2}{0,6} = \frac{1}{0,3}$$

$$s' = 0,3 \text{ m}$$

resultado que concuerda con la construcción gráfica. El tamaño es:

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{0,3}{-0,6}=\frac{\frac{3}{10}}{-\frac{6}{10}}=-\frac{1}{2}$$

por lo que la imagen es la mitad de grande que el objeto. *b*) Un rayo paralelo al eje óptico se refracta pasando por el foco imagen f'. Un rayo que provenga del foco objeto f se refracta paralelo y un rayo que pase por el eje óptico mantiene su dirección. Prolongando estos tres rayos refractados hacia atrás encontramos la posición de la imagen virtual 78. La imagen es virtual, aumentada y sin inversión

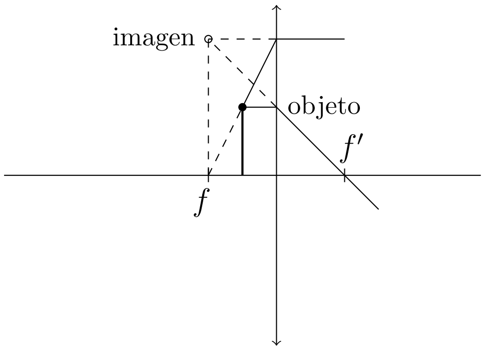

Figura 78: Lente convergente

vertical ni lateral. Para la resolución analítica usamos el criterio de signos de la norma DIN 1335 según el cual a la izquierda de la lente y por debajo del eje óptico las magnitudes son negativas. Por tanto $s=-0,1$ m, $f=-0,2$ m y $f'=0,2$ m. La ecuación de las lentes delgadas es:

$$-\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f'}$$

$$\frac{1}{s'}=\frac{1}{f'}+\frac{1}{s}$$

$$\frac{1}{s'}=\frac{1}{0,2}+\frac{1}{-0,1}$$

$$\frac{1}{s'}=\frac{1-2}{0,2}=\frac{-1}{0,2}$$

$$s'=-0,2 \text{ m}$$

resultado que concuerda con la construcción gráfica, la imagen se forma en el foco objeto. El tamaño es:

$$\frac{y'}{y}=\frac{s'}{s}$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{-0,2}{-0,1}=2$$

por lo que la imagen es el doble de grande que el objeto.

13. Construya gráficamente la imagen y explique sus características para (resuélvalo también analíticamente): *a*) un objeto que se encuentra a 0,5 m frente a una lente

delgada biconvexa de 1 m de distancia focal, *b*) un objeto situado a una distancia menor que la focal de un espejo cóncavo.

Solución. *a*) Una lente biconvexa es una lente convergente y como el objeto se encuentra a la mitad de distancia del foco objeto, igual que en el enunciado del apartado *b*) del ejercicio 12, el resultado es por tanto igual, formándose la imagen virtual en el foco objeto y siendo el doble de grande que el objeto (figura 78). *b*) Un rayo paralelo se refleja pasando por el foco y un rayo que provenga del foco se refleja paralelo. Proyectando estos dos rayos hacia la derecha obtenemos la imagen virtual, aumentada y sin inversión lateral ni vertical, como se muestra en la figura 73.

14. *a*) ¿Cuál es la potencia óptica de una lente bicóncava con ambos radios de curvatura iguales a 20 cm y un índice de refracción de 1,4? *b*) Y si fuera una lente biconvexa?

Solución. *a*) La potencia en una lente delgada es:

$$P = \frac{1}{f'} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \tag{20}$$

Una lente bicóncava es una lente divergente y en la figura 79 se muestra quién es r_1 y r_2. Usando el criterio de signos conforme a la norma DIN1335:

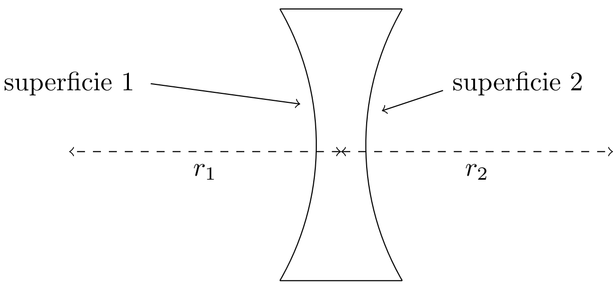

Figura 79: Lente divergente

$$P = \frac{1}{f'} = (1,4-1)\left(\frac{1}{-0,2} - \frac{1}{0,2}\right)$$

$$P = \frac{1}{f'} = (1,4-1)\left(\frac{-1-1}{0,2}\right)$$

$$P = \frac{1}{f'} = 0,4 \cdot (-10) = -4\ \text{m}^{-1} = -4\ \text{dioptrías}$$

b) Una lente biconvexa es una lente convergente y en la figura 80 se muestra quién es r_1 y r_2. Usando el criterio de signos conforme a la norma DIN1335 y sustituyendo los valores en la ecuación 20:

$$P = \frac{1}{f'} = (1,4-1)\left(\frac{1}{0,2} - \frac{1}{-0,2}\right)$$

$$P = \frac{1}{f'} = (1,4-1)\left(\frac{1+1}{0,2}\right)$$

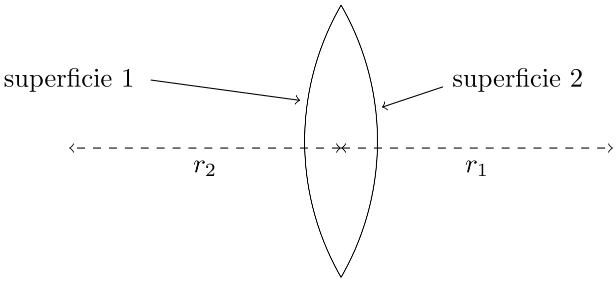

Figura 80: Lente convergente

$$P = \frac{1}{f'} = 0,4 \cdot 10 = 4 \text{ m}^{-1} = 4 \text{ dioptrías}$$

15. *a*) Un objeto luminoso se encuentra a 4 m de una pantalla. Mediante una lente situada entre el objeto y la pantalla se pretende obtener una imagen del objeto sobre la pantalla que sea real, invertida y tres veces mayor que él. Determine el tipo de lente que se tiene que utilizar, así como su distancia focal y la posición en la que debe situarse, justificando sus respuestas. *b*) ¿Por qué un objeto situado en el fondo de una piscina llena de agua se observa desde el aire aparentemente a menor profundidad de la que en realidad se encuentra? Justifique la respuesta con la ayuda de un esquema.

Solución. *a*) La lente divergente solo crea imágenes virtuales por lo que no nos sirve. Tiene que ser por tanto una lente convergente y el objeto tiene que estar a la izquierda del foco objeto. Sabiendo que la imagen es invertida y tres veces mayor que el objeto:

$$y' = -3y$$

y sustituyendo en:

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}$$

$$-3 = \frac{s'}{s}$$

$$s' = -3s \tag{21}$$

Como nos dicen que entre el objeto y la pantalla hay 4 m:

$$|s| + s' = 4 \tag{22}$$

escribimos la ecuación 21 en valor absoluto $s' = 3|s|$ y sustituimos en 22:

$$|s| + 3|s| = 4 \Rightarrow |s| = 1 \text{ m} \Rightarrow s = -1 \text{ m}$$

y $s' = 3$ m. Hallamos la distancia focal mediante la ecuación de las lentes delgadas:

$$-\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'}$$

$$\frac{1}{f'} = -\frac{1}{-1} + \frac{1}{3} = \frac{3+1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$f' = \frac{3}{4} = 0,75 \text{ m}$$

por lo que debe usarse una lente convergente de distancia focal 0,75 m y el objeto debe situarse a 1 m a la izquierda de la lente para que así se forme la imagen a 3 m a su derecha sobre la pantalla. *b*) El objeto refleja la luz que le llega en el fondo de la piscina y estos rayos se refractan al cambiar de medio del agua al aire. Conforme a la ley de Snell, al pasar a un medio de menor índice de refracción, se separan de la normal. Estos rayos llegan a nuestros ojos pero el cerebro interpreta que vienen rectos en todo momento y piensa que la imagen virtual tiene menos profundidad, como se muestra en la figura 81

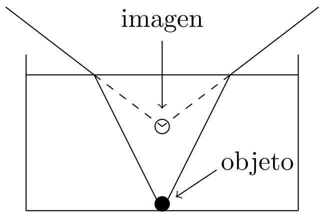

Figura 81:

FÍSICA CUÁNTICA

1. Un haz de luz de longitud de onda $546 \cdot 10^{-9}$ m incide en una célula fotoeléctrica de cátodo de cesio, cuyo trabajo de extracción es de 2 eV: *a*) Explique las transformaciones energéticas en el proceso de fotoemisión y calcule la energía cinética máxima de los electrones emitidos. *b*) ¿Qué ocurriría si la longitud de onda de la radiación incidente en la célula fotoeléctrica fuera doble de la anterior?
   Datos: $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ J s, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C y $c = 3 \cdot 10^8$ m s^{-1}.

   Solución. *a*) La fotoemisión (figura 82) consiste en que un fotón choca con un electrón de un metal y le transfiere toda su energía, la cual permite al electrón salir expulsado del metal. Se conserva la energía y por tanto se cumple que la

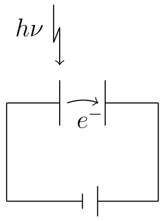

Figura 82: Fotoemisión

   energía del fotón es igual que la energía del electrón:

$$E_{\text{fotón}} = W_{\text{extr}} + E_{\text{c}}$$

   donde W_{extr} es el trabajo de extracción o energía umbral del metal (en este caso cesio) y es la energía necesaria para escapar del metal y E_{c} es la energía cinética que adquiere el electrón. En este ejercicio hay una unidad nueva, el electronvoltio (eV), que es la energía cinética que adquiere un electrón que parte del reposo sometido a una diferencia de potencial de 1 V:

$$\Delta E_c = -\Delta E_p$$

$$E_{\text{c}} = -q \cdot \Delta V$$
$$E_{\text{c}} = -1,6 \cdot 10^{-19} \cdot (-1) = 1,6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

con que te den como dato la carga del electrón ya te acuerdas de la equivalencia: 1 eV$=1,6 \cdot 10^{-19}$ J. Expresamos el trabajo de extracción en el SI:

$$W_{\text{ext}} = 2\ \text{eV} \cdot \frac{1,6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1\ \text{eV}} = 3,2 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

y hallamos la energía del fotón:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^{8}}{546 \cdot 10^{-9}} = 5,49 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}$$

$$E_{\text{fotón}} = h \cdot \nu = 6,6 \cdot 10^{-34} \cdot 5,49 \cdot 10^{14} = 3,6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

Ya podemos calcular la energía cinética que adquiere el electrón:

$$E_{\text{c}} = E_{\text{fotón}} - W_{\text{extr}} = 3,6 \cdot 10^{-19} - 3,2 \cdot 10^{-19} = 4,2 \cdot 10^{-20}\ \text{J}$$

b) En este caso al aumentar la longitud de onda disminuye la energía del fotón:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^{8}}{1092 \cdot 10^{-9}} = 2,7 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}$$

$$E_{\text{fotón}} = h \cdot \nu = 6,6 \cdot 10^{-34} \cdot 2,7 \cdot 10^{14} = 1,8 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

y ahora la energía del fotón es menor que la energía umbral por lo que no ocurrirá fotoemisión, los fotones no tienen suficiente energía para extraer electrones.

2. *a*) Indique por qué la existencia de una frecuencia umbral para el efecto fotoeléctrico va en contra de la teoría ondulatoria de la luz. *b*) Si una superficie metálica emite fotoelectrones cuando se ilumina con luz verde, razone si los emitirá cuando se ilumina con luz azul.

   Solución. *a*) Según la mecánica clásica, la energía de las ondas es proporcional a la amplitud y a la frecuencia al cuadrado, por tanto para cualquier frecuencia siempre podremos aumentar suficientemente la amplitud hasta conseguir la energía necesaria para extraer un electrón. *b*) Sí los emitirá puesto que la luz azul tiene una frecuencia mayor que la verde, por lo que los fotones azules tienen más energía que lo fotones verdes, conforme a $E = h \cdot \nu$.

3. De entre las siguientes opciones, elija la que crea correcta y explique por qué: *a*) La energía cinética máxima de los fotoelectrones emitidos por un metal depende de: *i*) la intensidad de la luz incidente; *ii*) la frecuencia de la luz incidente; *iii*) la velocidad de la luz.
   b) Razone si es cierta o falsa la siguiente afirmación: «En un experimento sobre

el efecto fotoeléctrico los fotones con frecuencia menor que la frecuencia umbral no pueden arrancar electrones del metal».

Solución. *a*) *ii*) Depende de la frecuencia de la luz incidente, puesto que la frecuencia umbral es una constante para cada metal y la energía cinética depende de $E_\mathrm{c} = h\nu - h\nu_0$. *b*) Es cierta porque dichos fotones no tienen energía suficiente para vencer el trabajo de extracción.

4. Comente las siguientes afirmaciones relativas al efecto fotoeléctrico: *a*) El trabajo de extracción de un metal depende de la frecuencia de la luz incidente. *b*) La energía cinética máxima de los electrones emitidos varía linealmente con la frecuencia de la luz incidente.

   Solución. *a*) Es falsa puesto que solo depende del metal. *b*) Es cierta, puesto que la energía cinética es

   $$E_\mathrm{c} = h\nu - h\nu_0$$

   y comparando con la ecuación de una recta

   $$y = mx + n$$

   vemos que la frecuencia incidente está elevada a uno, por lo que la energía cinética depende linealmente de la frecuencia incidente. Esto significa que si se incrementa la frecuencia incidente, la energía de los electrones se incrementa en igual proporción (figura 83). La pendiente está exagerada para facilitar el dibujo puesto que

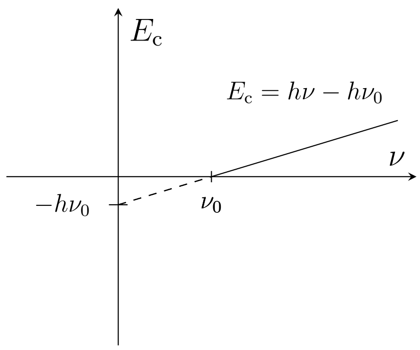

   Figura 83: Energía cinética

   h es una constante extremadamente pequeña.

5. Se llama diferencia de potencial de corte de una célula fotoeléctrica, V_c, a la que hay que aplicar entre el ánodo y el fotocátodo para anular la intensidad de corriente. *a*) Dibuje y comente la gráfica que relaciona V_c con la frecuencia de la luz incidente y escriba la expresión de la ley física correspondiente. *b*) ¿Dependerá la gráfica anterior del material que constituye el fotocátodo? ¿Puede determinarse la constante de Planck a partir de una gráfica experimental de V_c frente a la frecuencia de la radiación incidente? Indique cómo.

   Solución. *a*) Cuando iluminamos un metal la luz extrae electrones con energía cinética y estos vuelven al metal atraídos por los núcleos positivos del metal. Si el metal lo conectamos a un circuito, como en el esquema que mostramos en los apuntes, los electrones ganan aún más energía cinética debido a la diferencia de potencial entre el cátodo y el ánodo. Si invertimos la polaridad y empezamos con un potencial bajo, algunos electrones alcanzan el otro electrodo y el amperímetro detecta paso de corriente. Al incrementar el voltaje llega un momento en que la intensidad de corriente es cero, y ese es el valor del potencial de corte. Ahora los electrones salen del metal y justo al llegar al otro electrodo dan la vuelta por efecto de la diferencia de potencial, de igual manera que si tiramos un objeto hacia arriba asciende hasta que da la vuelta y asciende justo hasta que su energía cinética inicial es igual que la potencial en el punto más alto. La ecuación que rige el fenómeno es:

$$h\nu = h\nu_0 + E_{\mathrm{c}}$$
$$E_{\mathrm{c}} = h\nu - h\nu_0$$
$$e \cdot V = h\nu - h\nu_0$$
$$V = \frac{h}{e}\nu - \frac{h}{e}\nu_0$$

y vemos que V, el potencial de corte, depende de la frecuencia incidente (figura 84). *b*) Solo depende del material en el punto de corte con el eje OX, que es la

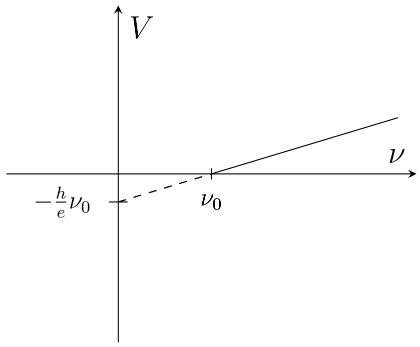

Figura 84: Potencial de corte

frecuencia umbral. Sí se puede obtener la constante de Planck puesto que la pendiente de la recta es la constante de Planck dividida entre la carga del electrón. En el experimento se hace incidir luz de diferentes frecuencias y se obtienen diferentes potenciales de corte y se representan dichos puntos en la gráfica. Dibujamos la recta que mejor se ajuste a ellos y obtenemos su pendiente y como conocemos la carga del electrón podemos obtener experimentalmente la constante de Planck.

6. Al absorber un fotón se produce en un átomo una transición electrónica entre dos niveles separados por una energía de $12 \cdot 10^{-19}$ J. *a*) Explique, energéticamente, el proceso de absorción del fotón por el átomo. ¿Volverá espontáneamente el átomo a su estado inicial? *b*) Si el mismo fotón incidiera en la superficie de un metal cuyo trabajo de extracción es de 3 eV, ¿se produciría emisión fotoeléctrica?
   Dato: $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

   Solución. *a*) Al chocar el fotón con el electrón, el fotón desaparece y le cede toda su energía al electrón, el cual, con esa energía recibida asciende a una órbita superior. El fotón tiene que tener exactamente esta frecuencia:

$$h\nu = \Delta E$$

$$\nu = \frac{\Delta E}{h}$$

$$\nu = \frac{12 \cdot 10^{-19}}{6,6 \cdot 10^{-34}} = 1,8 \cdot 10^{15} \ \text{Hz}$$

Posteriormente el electrón volverá a su estado de menor energía emitiendo un fotón. *b*) Sí, porque la energía del fotón, $E_{\text{fotón}} = 12 \cdot 10^{-19}$ J, es mayor que el trabajo de extracción $W_{\text{ext}} = 3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 4,8 \cdot 10^{-19}$ J.

7. Un haz monocromático de luz de $4 \cdot 10^{-7}$ m de longitud de onda incide sobre un material que tiene una función de trabajo de 2 eV. El haz tiene una intensidad de $3 \cdot 10^{-9}$ W$\cdot$ m^{-2}. Calcule: *a*) El número de fotones que inciden sobre la superficie del metal por m^2 y por segundo. *b*) El potencial de frenado de los electrones. Datos: $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ J s, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C y $c = 3 \cdot 10^8$ m s^{-1}.

   Solución. *a*) La energía de un fotón es:

$$E_{\text{fotón}} = h\frac{c}{\lambda} = 6,6 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{3 \cdot 10^8}{4 \cdot 10^{-7}} = 4,95 \cdot 10^{-19} \ \text{J}$$

   por lo que el número de fotones por segundo y metro cuadrado es:

$$\frac{3 \cdot 10^{-9} \ \text{J}}{4,95 \cdot 10^{-19} \ \dfrac{\text{J}}{\text{fotón}}} = 6,06 \cdot 10^9 \ \text{fotones}$$

   b) El potencial de frenado es:

$$eV = h\nu - W$$

   Cambiamos el trabajo de extracción de electronvoltios a julios:

$$W = 2 \ \text{eV} \cdot \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \ \text{J}}{1 \ \text{eV}} = 3,2 \cdot 10^{-19} \ \text{J}$$

   y despejamos el potencial de frenado:

$$eV = 4,95 \cdot 10^{-19} - 3,2 \cdot 10^{-19} = 1,75 \cdot 10^{-19} \ \text{V}$$

$$V = \frac{1,75 \cdot 10^{-19}}{e} = \frac{1,75 \cdot 10^{-19}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 1,1 \ \text{V}$$

8. *a*) ¿Qué significado tiene la expresión «longitud de onda asociada a una partícula»? *b*) Si la energía cinética de una partícula aumenta, ¿aumenta o disminuye su longitud de onda asociada?

   Solución. *a*) Es una expresión contradictoria puesto que las partículas no tienen longitud de onda. Sin embargo De Broglie introdujo la hipótesis de que las partículas tienen una longitud de onda asociada, aunque no sabía de qué tipo y experimentalmente se observó que el impacto de un chorro de electrones sobre una pantalla mostraba el patrón característico de un patrón de difracción, por lo que se comprobó experimentalmente la hipótesis de De Broglie. *b*) Si aumenta la energía cinética, aumenta su velocidad y por tanto disminuye su longitud de onda asociada como comprobamos en $\lambda = \dfrac{h}{mv}$.

9. *a*) Enuncie la hipótesis de De Broglie e indique de qué depende la longitud de onda asociada a una partícula. *b*) ¿Se podría determinar simultáneamente, con exactitud, la posición y la cantidad de movimiento de una partícula? Razone la respuesta.

   Solución. *a*) La hipótesis de De Broglie dice que las partículas tienen una onda asociada de longitud de onda
$$\lambda = \frac{h}{mv}$$
   . La hipótesis no dice qué tipo de onda ni qué magnitud se modifica en el tiempo y el espacio. La propone considerando que la naturaleza es simétrica y como el efecto fotoeléctrico nos muestra que la luz muestra un comportamiento corpuscular él propone que las partículas también son ondas. *b*) Según el ppo. de incertidumbre de Heisenberg existe un límite para dicha exactitud:
$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{2\pi}$$
   Si esa partícula es macroscópica no tendríamos limitación pero si es microscópica sí habría limitación. Podríamos conocer con mucha exactitud su posición pero su cantidad de movimiento la conoceríamos con poca exactitud y a la vicecersa. Por ejemplo, y de manera aproximada, si tenemos un error de solo 10^{-33} en la posición, tendríamos un inmenso error de 10^{-1} en la cantidad de movimiento.

10. Un haz de electrones es acelerado desde el reposo por una diferencia de potencial de 100 V. *a*) Haga un análisis energético del proceso y calcule la longitud de onda de los electrones tras ser acelerados, indicando las leyes físicas en que se basa. *b*) Repita el apartado anterior para el caso de protones y calcule la relación entre las longitudes de onda obtenidas en ambos apartados. Datos: $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ J s, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, $m_{\mathrm{e}} = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg y $m_{\mathrm{p}} = 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg.

    Solución. *a*) Es un campo eléctrico conservativo por lo que se conserva la energía mecánica, conforme disminuye su energía potencial se incrementa su energía cinética, que en valor absoluto es:
$$E_c = e \cdot V$$
$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot V}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 100}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 5,9 \cdot 10^{6} \ \text{m s}^{-1}$$
    Según la hipótesis de De Broglie:
$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 5,9 \cdot 10^{6}} = 1,22 \cdot 10^{-10} \ \text{m}$$
    que es una longitud de onda muy pequeña y los fenómenos de interferencia se observarán solo con obstáculos o aberturas de tamaño semejante. *b*)
$$E_c = e \cdot V$$
$$v = \frac{2 \cdot e \cdot V}{m} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 100}{1,7 \cdot 10^{-27}}} = 1,37 \cdot 10^{5} \ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Según la hipótesis de De Broglie:

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34}}{1,7 \cdot 10^{-27} \cdot 1,37 \cdot 10^{5}} = 2,83 \cdot 10^{-12} \ \text{m}$$

y la relación entre ambas longitudes es:

$$\frac{\lambda_{\text{p}}}{\lambda_{\text{e}}} = 0,023$$

11. Un átomo de plomo se mueve con una energía cinética de 107 eV. *a*) Determine el valor de la longitud de onda asociada a dicho átomo. *b*) Compare dicha longitud de onda con las que corresponderían, respectivamente, a una partícula de igual masa y diferente energía cinética y a una partícula de igual energía cinética y masa diferente. Datos: $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ J s, 1 u=$1,66 \cdot 10^{-27}$ kg y $m_{\text{Pb}} = 207$ u.

    Solución. *a*)

$$E_{\text{c}} = 107 \ \text{eV} = 107 \ \text{eV} \cdot \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \ \text{J}}{1 \ \text{eV}} = 1,71 \cdot 10^{-17} \ \text{J}$$

Cambiamos la masa de unidad de masa atómica a kilogramos:

$$m_{\text{Pb}} = 207 \ \text{u} = 207 \ \text{u} \cdot \frac{1,66 \cdot 10^{-27} \ \text{kg}}{1 \ \text{u}} = 3,43 \cdot 10^{-25} \ \text{kg}$$

Obtenemos la velocidad:

$$\frac{1}{2}mv^2 = 1,71 \cdot 10^{-17} \ \text{J}$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,71 \cdot 10^{-17}}{3,43 \cdot 10^{-25}}} = 9,98 \cdot 10^{3} \ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

y obtenemos la longitud de onda asociada:

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34}}{3,43 \cdot 10^{-25} \cdot 9,98 \cdot 10^{3}} = 1,93 \cdot 10^{-13} \ \text{m}$$

b) En el primer caso, si la masa no cambia y la energía cinética aumenta, aumenta la velocidad de la partícula, por lo que disminuye su longitud de onda. De manera formal sería:

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

$$\lambda' = \frac{h}{m'v'}$$

$$m' = m$$

$$E'_{\text{c}} = \frac{1}{2}m'v'^2$$

$$E'_{\text{c}} = \frac{1}{2}mv'^2$$

$$v' = \sqrt{\frac{2E'_{\mathrm{c}}}{m}}$$

$$\lambda' = \frac{h}{m\sqrt{\frac{2E'_{\mathrm{c}}}{m}}}$$

y comprobamos que si aumentamos la energía cinética, disminuye la longitud de onda. El segundo caso es más complicado porque vemos que si aumenta la masa disminuye la velocidad (para mantener la energía cinética constante) y no obtenemos nada claro sobre cómo se modifica la longitud de onda. Vamos a obtener una expresión de la energía cinética muy útil:

$$p = mv$$

$$p^2 = m^2v^2$$

$$\frac{1}{2}p^2 = \frac{1}{2}m^2v^2$$

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2}mv^2$$

$$E_{\mathrm{c}} = \frac{p^2}{2m}$$

y expresemos la cantidad de movimiento en función de la energía cinética:

$$p = \sqrt{2mE_{\mathrm{c}}}$$

Ahora veamos cómo varía la longitud de onda:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_{\mathrm{c}}}}$$

$$\lambda' = \frac{h}{\sqrt{2m'E_{\mathrm{c}}}}$$

y observamos que si aumenta la masa disminuye la longitud de onda.

INTERACCIÓN NUCLEAR

1. *a*) Calcule la energía de enlace de los núcleos ^{3}H y ^{3}He. *b*) ¿Qué conclusión, acerca de la estabilidad de dichos núcleos, deduciría de los resultados del apartado a)? Datos: $m_{(^3\mathrm{He})} = 3,016029$ u, $m_{(^3\mathrm{H})} = 3,016049$ u, $m_{\mathrm{p}} = 1,007825$ u, $m_{\mathrm{n}} = 1,008665$ u, 1 u = 1,66·10^{-27} kg y $c = 3 \cdot 10^8$ m s^{-1}.

   Solución. *a*) Sabemos que la masa de un núcleo es menor que la suma de las masas de los nucleones que lo forman y que dicha diferencia de masa se transforma en energía, que es la energía de enlace. Calculémosla para el hidrógeno.

$$\Delta m = m_{\mathrm{p}} + 2m_{\mathrm{n}} - m_{(^3\mathrm{H})} = 1,007825 + 2 \cdot 1,008665 - 3,016049 = 9,106 \cdot 10^{-3} \text{ u}$$

Pasamos de unidad de masa atómica a kilogramos:

$$\Delta m = 9,106 \cdot 10^{-3}\ \text{u} \cdot \frac{1,66 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}{1\ \text{u}} = 1,511596 \cdot 10^{-29}\ \text{kg}$$

y mediante la equivalencia entre la masa y la energía obtenemos la energía de enlace:

$$E_{\text{enlace}} = mc^2 = 1,511596 \cdot 10^{-29} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 1,3604364 \cdot 10^{-12}\ \text{J}$$

Para el helio:

$$\Delta m = 2m_{\text{p}} + m_{\text{n}} - m_{(^3\text{He})} = 2 \cdot 1,007825 + 1,008665 - 3,016029 = 8,286 \cdot 10^{-3}\ \text{u}$$

Pasamos de unidad de masa atómica a kilogramos:

$$\Delta m = 8,286 \cdot 10^{-3}\ \text{u} \cdot \frac{1,66 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}{1\ \text{u}} = 1,375476 \cdot 10^{-29}\ \text{kg}$$

y mediante la equivalencia entre la masa y la energía obtenemos la energía de enlace:

$$E_{\text{enlace}} = mc^2 = 1,375476 \cdot 10^{-29} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 1,2379284 \cdot 10^{-12}\ \text{J}$$

b) Cuanto mayor sea la energía de enlace desprendida en la formación del nucleo mayor será su estabilidad, por lo que es más estable el hidrógeno.

2. *a*) Justifique cuantitativamente cuál de los núclidos $^{16}_{8}\text{O}$ y $^{218}_{84}\text{Po}$ es más estable. *b*) En la desintegración del $^{218}_{84}\text{Po}$ se emiten una partícula alfa y dos partículas beta, obteniéndose un nuevo núcleo. Indique las características de dicho núcleo resultante. ¿Qué relación existe entre el núcleo inicial y el final?
Datos: $m_{(^{16}\text{O})} = 15,994915$ u, $m_{(^{218}\text{Po})} = 218,009007$ u, $m_{\text{p}} = 1,007825$ u, $m_n = 1,008665$ u y 1 u = 1,66·10^{-27} kg.

Solución. *a*) Calculamos el defecto de masa:

$$\Delta m = 8m_{\text{p}} + 8m_{\text{n}} - m_{(^{16}\text{O})} = 8 \cdot 1,007825 + 8 \cdot 1,008665 - 15,994915 = 0,137005\ \text{u}$$

Pasamos de unidad de masa atómica a kilogramos:

$$\Delta m = 0,137005\ \text{u} \cdot \frac{1,66 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}{1\ \text{u}} = 2,274283 \cdot 10^{-28}\ \text{kg}$$

y mediante la equivalencia entre la masa y la energía obtenemos la energía de enlace:

$$E_{\text{enlace}} = mc^2 = 2,274283 \cdot 10^{-28} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 2,0468547 \cdot 10^{-11}\ \text{J}$$

y obtenemos la energía de enlace por nucleón:

$$\frac{E_{\text{enlace}}}{\text{nucleón}} = \frac{E_{\text{enlace}}}{\text{A}} = \frac{2,0468547 \cdot 10^{-11}}{16} = 1,28 \cdot 10^{-12}\ \text{J}$$

Repetimos para el polonio:

$$\Delta m = 84 m_{\rm p} + 134 m_{\rm n} - m_{(^{218}\rm Po)}$$

$$\Delta m = 84 \cdot 1,007825 + 134 \cdot 1,008665 - 218,009007 = 1,809403 \text{ u}$$

Pasamos de unidad de masa atómica a kilogramos:

$$\Delta m = 1,809403 \text{ u} \cdot \frac{1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{1 \text{ u}} = 3,00360898 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

y mediante la equivalencia entre la masa y la energía obtenemos la energía de enlace:

$$E_{\rm enlace} = mc^2 = 3,00360898 \cdot 10^{-27} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 2,703248082 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

y obtenemos la energía de enlace por nucleón:

$$\frac{E_{\rm enlace}}{\text{nucleón}} = \frac{E_{\rm enlace}}{\text{A}} = \frac{2,703248082 \cdot 10^{-10}}{218} = 1,240022056 \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

Es más estable el oxígeno porque es el que tiene mayor energía de enlace por nucleón. Esto significa que ante una emisión de partículas se requiere más energía para extraerlas. El polonio sería más estable ante una rotura completa del núcleo en todos sus nucleones, puesto que tiene la mayor energía de enlace pero eso no ocurre en la naturaleza. *b*) Como se conserva la masa atómica y la carga se cumple:

$$^{218}_{84}\text{Po} \;\rightarrow\; ^{4}_{2}\text{He} \;+\; 2\ ^{\;\,0}_{-1}\text{e} \;+\; ^{214}_{84}\text{Po}$$

y vemos que el nuevo núcleo es un isótopo del átomo original por lo que químicamente es indistinguible y solo se diferencia por la masa, aunque en una cantidad casi imperceptible.

3. El periodo de semidesintegración de un nucleido radiactivo, de masa atómica 200 u, que emite partículas β es de 50 s. Una muestra, cuya masa inicial era de 50 g, contiene en la actualidad 30 g del nucleido original. *a*) Indique las diferencias entre el nucleido original y el resultante y represente gráficamente la variación con el tiempo de la masa de nucleido original. *b*) Calcule la antigüedad de la muestra y su actividad actual. Dato: $\text{N}_\text{A} = 6,02 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}.

   Solución. *a*) Como se conserva la masa atómica y la carga se cumple:

$$^{200}_{\ \rm Z}\text{X} \;\rightarrow\; ^{\;\,0}_{-1}\text{e} \;+\; ^{\;\;200}_{Z+1}\text{Y}$$

   por lo que el nuevo elemento sucede al inicial en el sistema periódico. La masa disminuye exponencialmente como se muestra en la figura 85. *b*) La radiactividad cumple la ley de la desintegración:

$$N = N_0 \; e^{-\lambda t}$$

   Primero obtenemos la constate de desintegración:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{0,693}{50} = 0,013862943 \text{ s}$$

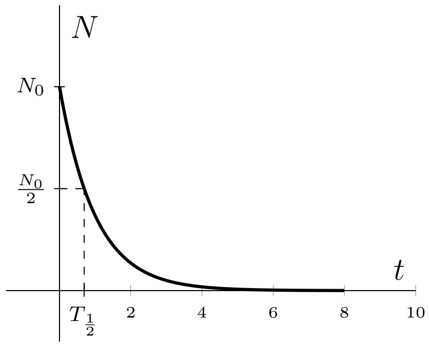

Figura 85: Disminución de la masa

y obtenemos la antigüedad teniendo en cuenta que la relación entre las masas es igual que la relación entre los número de partículas:

$$\frac{m}{m_0} = \frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t}$$

$$\frac{30}{50} = e^{-\lambda t}$$

Aplicamos el logaritmo neperiano a toda la ecuación:

$$\ln \frac{3}{5} = -\lambda t$$

Por las propiedades de los logaritmos neperianos:

$$-\ln \frac{5}{3} = -\lambda t$$

y finalmente despejamos:

$$t = \frac{\ln \frac{5}{3}}{\lambda} = 36,85 \text{ s}$$

Obtenemos el número de partículas actual:

$$N = 30 \text{ g} \cdot \frac{N_{\text{A}}}{200 \text{ g}} = 9,033 \cdot 10^{22} \text{ núcleos}$$

y la actividad es:

$$A = N\lambda = 9,033 \cdot 10^{22} \cdot 0,013862943 = 1,25 \cdot 10^{21} \text{ s}^{-1}$$

4. *a*) La masa de un núcleo atómico no coincide con la suma de las masas de las partículas que lo constituyen. ¿Es mayor o menor? ¿Cómo justifica esa diferencia? *b*) ¿Qué se entiende por estabilidad nuclear? Explique, cualitativamente, la dependencia de la estabilidad nuclear con el número másico.

   Solución. *a*) Es menor, debido a que en la formación del nucleo esa diferencia de masa se libera en forma de energía conforme a la ecuación de Einstein $E = mc^2$. *b*) Todos los sistemas físicos tienden al mínimo de energía y de igual manera les ocurre a los nucleones, que uniéndose y formando un núcleo son más estables porque tienen menos energía que estando separados, de igual manera que una pelota es más estable y tiene menos energía en la parte baja de una rampa. Cuanta más energía se desprenda en la formación, más estables son. Como habitualmente los núcleos no se descomponen en todas sus partículas sino que sufren emisiones radiactivas perdiendo alguna partícula, la energía de enlace por nucleón nos indica más claramente la estabilidad de los núcleos. Esta energía de enlace por nucleón es mayor en el caso del hierro, como se puede ver en una gráfica que la represente frente al número atómico (dibujadla) y observamos que los átomos muy pesados o muy ligeros son menos estables que los medios.

5. Una muestra de isótopo radiactivo recién obtenida tiene una actividad de 84 s^{-1} y, al cabo de 30 días, su actividad es de 6 s^{-1}. *a*) Explique si los datos anteriores dependen del tamaño de la muestra. *b*) Calcule la constante de desintegración y la fracción de núcleos que se han desintegrado después de 11 días.

   Solución. *a*) Sí dependen, como se ve en la expresión: $A = N\lambda$. *b*) Para no liarse siempre es mejor usar unidades del SI pero si lo dejamos en días trabajamos menos y también es válido. Nos dicen que:

$$\left.\begin{aligned} A &= N\lambda \\ A_0 &= N_0\lambda \end{aligned}\right\}$$

   dividiendo una entre la otra y usando la ley de desintegración:

$$\frac{A}{A_0} = \frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t}$$

$$\frac{6}{84} = e^{-\lambda \cdot 30}$$

$$\ln \frac{84}{6} = \lambda \cdot 30$$

$$\lambda = \frac{\ln 14}{30} = 0,0870 \ \frac{1}{\text{dia}}$$

   La fracción de núcleos que quedan es:

$$\frac{N}{N_0} = e^{-0,087 \cdot 11} = 0,37$$

   y por tanto la fracción que se ha desintegrado es 0,63, que en tanto por ciento sería que se han desintegrado el 63 %.

6. Escriba la ley de desintegración de una muestra radiactiva y explique el significado físico de las variables y parámetros que aparecen en ella. *b*) Supuesto que pudiéramos aislar un átomo de la muestra anterior discuta, en función del parámetro apropiado, si cabe esperar que su núcleo se desintegre pronto, tarde o nunca.

   Solución. *a*) La ley de desintegración radiactiva es:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

donde N_0 es el número de núcleos iniciales, N el número de núcleos finales, t el tiempo transcurrido y λ la constante de desintegración, que depende de la sustancia radiactiva a estudiar. La magnitud N no tiene unidades, el tiempo se mide en segundos y la constante de desintegración en s^{-1}. Como se trata de una función exponencial (85), inicialmente los núcleos disminuyen rápidamente, pero conforme pasa el tiempo observamos que tardan mucho en desintegrarse quedando, durante mucho tiempo, núcleos sin desintegrar. *b*) La vida media de una muestra radiactiva es el promedio de vida que se espera que dure un núcleo. Su expresión es:

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

y su unidad es el segundo. Si su valor es del orden de segundos podemos predecir que se desintegrara pronto, si es del orden de miles de años, tarde, pero no podemos esperar que no se desintegre nunca porque al ser una muestra radiactiva, por lo tanto no estable, siempre se acabará desintegrando.

7. *a*) ¿Cuál es la interacción responsable de la estabilidad del núcleo? Compárela con la interacción electromagnética. *b*) Indique qué es la actividad de una muestra. ¿De qué depende?

   Solución. *a*) La interacción responsable de la estabilidad de los núcleos es la interacción fuerte, que mantiene unidos a los protones y neutrones pese a la fuerte repulsión electrostática que surge entre los protones. La interacción electromagnética tiene alcance infinito y actúa sobre partículas con carga mientras que en la interacción fuerte su alcance se reduce al tamaño nuclear, actúa sobre nucleones (protones y neutrones) y es 100 veces más intensa que la electromagnética. *b*) La actividad, A, de una muestra es la velocidad de desintegración nuclear:

$$A = -\frac{dN}{dt}$$

   donde el signo menos es para obtener una velocidad positiva puesto que el número de núcleos decrece. Derivando:

$$A = -\frac{dN}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(N_0 e^{-\lambda t}\right) = -N_0 \cdot (-\lambda) \cdot e^{-\lambda t} = \lambda N$$

   y observamos que la actividad solo depende de la constante de desintegración y del número de núcleos, o sea, de la naturaleza de la sustancia y de sus cantidad.

8. En la bomba de hidrógeno se produce una reacción termonuclear en la que se forma helio a partir de deuterio y de tritio. *a*) Escriba la reacción nuclear. *b*) Calcule la energía liberada en la formación de un átomo de helio y la energía de enlace por nucleón del helio. Datos: $c = 3 \cdot 10^8$ m s^{-1}, $m_{^4_2\mathrm{He}} = 4,0026$ u, $m_{^3_1\mathrm{H}} = 3,0170$ u, $m_{^2_1\mathrm{H}} = 2,0141$ u, $m_\mathrm{p} = 1,0078$ u, $m_\mathrm{n} = 1,0086$ u y 1 u=1,67·10^{-27} kg.

   Solución. *a*) Como se conserva la masa y el número atómico:

$${}^2_1\mathrm{H} + {}^3_1\mathrm{H} \rightarrow {}^4_2\mathrm{He} + {}^1_0\mathrm{n}$$

   b) La energía liberada al formar el átomo de helio mediante dicha reacción:

$$\Delta m = \sum m_{\text{reactivos}} - \sum m_{\text{productos}}$$

$$\Delta m = m_{^3_1\mathrm{H}}+m_{^2_1\mathrm{H}}-(m_{^4_2\mathrm{He}}+m_{^1_0\mathrm{n}}) = 3,0170+2,0141-(4,0026+1,0086) = 0,0199\ \mathrm{u}$$

$$E_{\text{reacción}} = mc^2 = 0,0199 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 2,97306 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{J}$$

y la energía de enlace por nucleón del helio:

$$\Delta m = 2m_{\mathrm{p}} + 2m_{\mathrm{n}} - m_{(^4\mathrm{He})} = 2 \cdot 1,007825 + 2 \cdot 1,008665 - 4,0026 = 0,03038\ \mathrm{u}$$

Pasamos de unidad de masa atómica a kilogramos:

$$\Delta m = 0,03038\ \mathrm{u} \cdot \frac{1,66 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}}{1\ \mathrm{u}} = 5,04308 \cdot 10^{-29}\ \mathrm{kg}$$

y mediante la equivalencia entre la masa y la energía obtenemos la energía de enlace:

$$E_{\text{enlace}} = mc^2 = 5,04308 \cdot 10^{-29} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 4,538772 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{J}$$

$$\frac{E_{\text{enlace}}}{\text{nucleón}} = \frac{5,538772 \cdot 10^{-12}}{4} = 1,134693 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{J}$$

9. La actividad del ^{14}C ($T_{1/2} = 5700$ años) de un resto arqueológico es de 120 desintegraciones por segundo. La misma masa de una muestra actual de idéntica composición posee una actividad de 360 desintegraciones por segundo. *a*) Explique a qué se debe dicha diferencia y calcule la antigüedad de la muestra arqueológica. *b*) ¿Cuántos átomos de ^{14}C tiene la muestra arqueológica en la actualidad? ¿Tienen ambas muestras el mismo número de átomos de carbono?

Solución. *a*) Se debe a que la actividad depende del número de núcleos y estos disminuyen constantemente puesto que se están desintegrando constantemente. Para calcular la antigüedad:

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{\ln 2}{5700} = 1,21 \cdot 10^{-4}\ \text{año}^{-1}$$

$$\frac{A}{A_0} = e^{-\lambda t}$$

$$\ln\frac{A}{A_0} = -\lambda t$$

$$\ln\frac{A_0}{A} = \lambda t$$

$$\ln\frac{360}{120} = \lambda t$$

$$\ln 3 = \lambda t$$

$$t = \frac{\ln 3}{\lambda} = 9079\ \text{años}$$

b) Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{r} A = N\lambda \\ A_0 = N_0\lambda \end{array}\right\}$$

y dividiendolas obtenemos que

$$N = \frac{120}{360} \cdot N_0 = \frac{1}{3} N_0$$

por lo que tiene la tercera parte de carbono 14 respecto a la muestra original por lo que no tienen el mismo número de átomos de carbono.

10. El ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ se desintegra dando ${}^{14}_{7}\mathrm{N}$ y emitiendo una partícula beta. El periodo de semidesintegración del ${}^{14}\mathrm{C}$ es de 5730 años. *a*) Escriba la ecuación del proceso de desintegración. *b*) Si la actividad debida al ${}^{14}\mathrm{C}$ de los tejidos encontrados en una tumba es del 40 % de la que presentan los tejidos similares actuales, ¿cuál es la edad de aquellos?

    Solución. *a*) Averiguamos la constante de desintegración:

    $$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{\ln 2}{5730} = 1,21 \cdot 10^{-4} \text{ año}^{-1}$$

    La ecuación del proceso de desintegración es:

    $$N = N_0 \; e^{-1,21 \cdot 10^{-4} \cdot t}$$

    que nos da en todo momento el número de núcleos sin desintegrar N a partir del número inicial N_0 y del tiempo transcurrido t. *b*)

    $$\frac{A}{A_0} = 0,4 = e^{-1,21 \cdot 10^{-4} \cdot t}$$

    $$t = \frac{\ln 0,4}{-1,21 \cdot 10^{-4}} = 7573 \text{ años}$$

11. *a*) Algunos átomos de nitrógeno ${}^{14}_{7}\mathrm{N}$ atmosférico chocan con un neutrón y se transforman en carbono ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ que, por emisión β, se convierte de nuevo en nitrógeno. Escriba las correspondientes reacciones nucleares. *b*) Los restos de animales recientes contienen mayor proporción de ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ que los restos de animales antiguos. ¿A qué se debe este hecho y qué aplicación tiene?

    Solución. *a*) Como se conserva la masa y el número atómico las reacciones son:

    $${}^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow {}^{14}_{6}\mathrm{C} + {}^{1}_{1}\mathrm{H}$$

    $${}^{14}_{6}\mathrm{C} \rightarrow {}^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e}$$

    b) Se debe a que el carbono 14 entra en la cadena alimentaria por la fotosíntesis y los seres vivos tienen un continuo aporte de carbono 14 mientras que una vez muertos el carbono 14 se desintegra sin que se reponga. Sirve como método de datación cronológica, conociendo la constante de desintegración del carbono 14 y la actividad de la muestra y de una muestra actual se puede obtener el tiempo transcurrido con la ley de la desintegración radiactiva $N = N_0 e^{-\lambda t}$.

12. En una reacción nuclear se produce un defecto de masa de 0,2148 u por cada núcleo de ^{235}U fisionado. *a*) Calcule la energía liberada en la fisión de 23,5 g de ^{235}U. *b*) Si se producen 10^{20} reacciones idénticas por minuto, ¿cuál será la potencia disponible?
Datos: 1 u $=1,67 \cdot 10^{-27}$ kg, $c = 3 \cdot 10^8$ m s^{-1} y $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}.

Solución. *a*) El defecto de masa que se produce cuando reaccionan 23,5 g es:

$$23,5 \text{ g} \cdot \frac{1 \text{ mol}}{235 \text{ g}} \cdot \frac{6,022 \cdot 10^{23} \text{ núcleos}}{1 \text{ mol}} \cdot \frac{0,2148 \text{ u}}{1 \text{ núcleo}} \cdot \frac{1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{1 \text{ u}} = 2,14 \cdot 10^{-5} \text{ kg}$$

que, conforme a la ecuación de Einstein, produce esta energía:

$$E = mc^2 = 2,14 \cdot 10^{-5} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 1,93 \cdot 10^{12} \text{ J}$$

b) La potencia es la energía por unidad de tiempo:

$$P = \frac{10^{20} \cdot 0,2148 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \cdot (3 \cdot 10^8)^2}{60 \text{ s}} = 53,49 \text{ MW}$$

13. El $^{226}_{88}$Ra se desintegra radiactivamente para dar $^{222}_{86}$Rn. *a*) Indique el tipo de emisión radiactiva y escriba la ecuación de dicha reacción nuclear. *b*) Calcule la energía liberada en el proceso.
Datos: $c = 3 \cdot 10^8$ m s^{-1}, $m_{(^{226}_{88}\text{Ra})} = 226,0960$ u, $m_{(^{222}_{86}\text{Rn})} = 222,0869$ u, $m_{(^{4}_{2}\text{He})} = 4,00387$ u, y 1 u$= 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg.

Solución. *a*) Es una desintegración alfa:

$$^{226}_{88}\text{Ra} \ \rightarrow \ ^{222}_{86}\text{Rn} \ + \ ^{4}_{2}\text{He}$$

b) Calculamos el defecto de masa y la equivalencia masa-energía:

$$\Delta m = \sum m_{\text{reactivos}} - \sum m_{\text{productos}} = m_{\text{Ra}} - m_{\text{Rn}} - m_{\text{He}} =$$
$$= 226,0960 - 222,0869 - 4,00387 = 5,23 \cdot 10^{-3} \text{ u}$$

$$E = mc^2 = 5,23 \cdot 10^{-3} \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 7,81362 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

14. *a*) Describa el origen y las características de los procesos de emisión radiactiva alfa, beta y gamma. *b*) Indique el significado de las siguientes magnitudes: periodo de semidesintegración, constante radiactiva y vida media.

Solución. *a*) El origen de los procesos radiactivos es la inestabilidad de algunos núcleos. Podemos predecir su inestabilidad mediante la energía de enlace por nucleón, cuanto menor sea más inestable será, y al representar la energía de enlace por nucleón frente al número atómico observamos que los núcleos más ligeros y pesados del sistema periódico son más inestables, tendiendo a transformarse en elementos de masa media. La radiactividad alfa consiste en la emisión de núcleos de helio, la beta de electrones y la gamma de ondas electromagnéticas de frecuencia superior a los rayos X. Esas emisiones cumplen las leyes de Soddy, que se reducen a la conservación de los números atómico y másico:

$$1.^{\text{a}} \text{ ley} \quad ^{\text{A}}_{\text{Z}}\text{X} \rightarrow \, ^{\text{A}-4}_{\text{Z}-2}\text{Y} + \, ^{4}_{2}\text{He}$$
$$2.^{\text{a}} \text{ ley} \quad ^{\text{A}}_{\text{Z}}\text{X} \rightarrow \, ^{\text{A}}_{\text{Z}+1}\text{Y} + \, ^{0}_{-1}\text{e}$$
$$3.^{\text{a}} \text{ ley} \quad ^{\text{A}}_{\text{Z}}\text{X}^* \rightarrow \, ^{\text{A}}_{\text{Z}}\text{Y} + \gamma$$

b) El periodo de semidesintegración, $T_{\frac{1}{2}}$, es el tiempo que tarda la muestra en reducirse a la mitad:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{\frac{1}{2}}}$$

$$\ln\frac{1}{2} = -\lambda T_{\frac{1}{2}}$$

$$\ln 2 = \lambda T_{\frac{1}{2}}$$

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

La constante radiactiva depende de la sustancia y cuanto mayor sea más rápidamente se desintegrará. La vida media es el promedio de vida que se espera que dure un núcleo:

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

15. El ${}^{12}_{5}\mathrm{B}$ se desintegra radiactivamente en dos etapas: en la primera, el núcleo resultante es ${}^{12}_{6}\mathrm{C}^*$ (donde * indica un estado excitado) y en la segunda, el ${}^{12}_{6}\mathrm{C}^*$ se desexcita, dando ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$. *a*) Escriba los procesos de cada etapa, determinando razonadamente el tipo de radiación emitida en cada caso. *b*) Calcule la frecuencia de la radiación emitida en la segunda etapa si la diferencia de energía entre los estados energéticos del isótopo carbono es de 4,4 MeV.
Datos: $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ J s y $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

Solución. *a*) Como se conserva la masa y el número atómico:

$${}^{12}_{5}\mathrm{B} \;\rightarrow\; {}^{12}_{6}\mathrm{C}^* \;+\; {}^{\;\;0}_{-1}\mathrm{e}$$

$${}^{12}_{6}\mathrm{C}^* \;\rightarrow\; {}^{12}_{6}\mathrm{C} + \gamma$$

b) Los fotones emitidos tendrán una frecuencia:

$$\nu = \frac{E}{h} = \frac{4,4 \cdot 10^{6} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{6,6 \cdot 10^{-34}} = 1,07 \cdot 10^{21} \text{ Hz}$$

16. Dada la reacción nuclear de fisión:

$${}^{235}_{92}\mathrm{U} \;+\; {}^{1}_{0}\mathrm{n} \;\rightarrow\; {}^{90}_{38}\mathrm{Sr} \;+\; {}^{136}_{Z}\mathrm{Xe} \;+\; a\,{}^{1}_{0}\mathrm{n}$$

a) Halle razonadamente el número de neutrones emitidos, *a* y el valor de OZ.
b) ¿Qué energía se desprende en la fisión de 1 g de ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$?
Datos: $c = 3 \cdot 10^{8}$ m/s, $m_{({}^{235}_{92}\mathrm{U})} = 235,043944$ u, $m_{({}^{90}_{138}\mathrm{Sr})} = 89,907167$ u, $m_{({}^{136}\mathrm{Xe})} = 135,907294$ u, $m_{\mathrm{n}} = 1,008665$ u, 1 u = 1,66·10^{-27} kg y $\mathrm{N_A}$.

a) Para que se conserve la masa y el n.° atómico se tiene que cumplir:

$$92 = 38 + Z \implies Z = 54$$

$$235 + 1 = 226 + a \implies a = 10$$

b) Primero calculamos la energía que se desprende al fisionar un núcleo de uranio:

$$\Delta m = \sum m_{\text{reactivos}} - \sum m_{\text{productos}} = m_{\text{U}} - (m_{\text{Sr}} + m_{\text{Xe}} + 9 \cdot m_{\text{n}}) =$$
$$= 235,043944 - 89,907167 - 135,907294 - 9 \cdot 1,008665 = 0,151498 \text{ u}$$

$$E = mc^2 = 0,151498 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 2,26 \cdot 10^{-11} \text{ J}$$

y ahora calculamos para 1 g de uranio:

$$1 \text{ g} \cdot \frac{N_{\text{A}} \text{ núcleos}}{235 \text{ g}} \cdot \frac{2,26 \cdot 10^{-11} \text{ J}}{1 \text{ núcleo}} = 5,8 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

17. En un proceso de desintegración el núcleo radiactivo emite una partícula alfa. La constante de desintegración de dicho proceso es de $2 \cdot 10^{-10}$ s^{-1}. *a*) Explique cómo cambian las características del núcleo inicial y escriba la ley que expresa el número de núcleos sin transformar en función del tiempo. *b*) Si inicialmente había tres moles de dicha sustancia radiactiva, ¿cuántas partículas alfa se han emitido al cabo de 925 años? ¿Cuántos moles de He se han formado después de dicho tiempo?

    Solución. *a*) Según la primera ley de Soddy el núcleo se transforma en otro elemento químico que se encuentra dos posiciones antes en el sistema periódico y su número másico disminuye en cuatro unidades:

    $${}^{\text{A}}_{\text{Z}}\text{X} \;\rightarrow\; {}^{\text{A}-4}_{\text{Z}-2}\text{Y} \;+\; {}^{4}_{2}\text{He}$$

    La ley que expresa el número de núcleos sin transformar en función del tiempo es $N = N_0 \; e^{-2 \cdot 10^{-10} \cdot t}$. *b*) Calculamos los moles que quedarán al cabo de 925 años:

    $$925 \text{ años} \cdot \frac{365 \text{ dias}}{1 \text{ año}} \cdot \frac{24 \text{ horas}}{1 \text{ dia}} \cdot \frac{3600 \; s}{1 \text{ hora}} = 2,91708 \cdot 10^{10} \text{ s}$$

    $$N = 3 \cdot e^{-2 \cdot 10^{-10} \cdot 2,91708 \cdot 10^{10}} = 8,78 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$$

    Como por cada desintegración se emite una partícula alfa, se habrán emitido $3 - 8,78 \cdot 10^{-3}$ =2,99 mol de partículas alfa y multiplicando por el número de Avogadro obtenemos el número de partículas alfa emitidas, que son $1,80 \cdot 10^{24}$ partículas alfa.

18. El ^{131}I es un isótopo radiactivo que se utiliza en medicina para el tratamiento del hipertiroidismo, ya que se concentra en la glándula tiroides. Su periodo de semidesintegración es de 8 días. *a*) Explique cómo ha cambiado una muestra de 20 mg de ^{131}I tras estar almacenada en un hospital durante 48 días. *b*) ¿Cuál es la actividad de un microgramo de ^{131}I? Dato: $\text{N}_\text{A} = 6,02 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}.

    Solución. *a*) Obtenemos la constante de desintegración:

    $$\lambda = \frac{0,693}{8} = 0,08664 \text{ día}^{-1}$$

    y mediante la ley de desintegración obtenemos cuánta masa queda tras los 48 días:

    $$m = m_0 \; e^{-\lambda t} = 20 \cdot e^{-0,08664 \cdot 48} = 0,3125 \text{ mg}$$

    b) La actividad es

    $$A = N\lambda = 10^{-6} \cdot \frac{6,022 \cdot 10^{23}}{131} \cdot 0,08664 = 3,98 \cdot 10^{14} \text{ día}^{-1}$$

19. El núcleo ${}^{32}_{15}\mathrm{P}$ se desintegra emitiendo una partícula beta. *a*) Escriba la reacción de desintegración y determine razonadamente el número másico y el número atómico del núcleo resultante. *b*) Si el electrón se emite con una energía cinética de 1,7 MeV, calcule la masa del núcleo resultante.
Datos: $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, $m_\mathrm{e} = 5,5 \cdot 10^{-4}$ u,
$m_{({}^{32}_{15}\mathrm{P})} = 31,973908$ u y 1 u = 1,66·10^{-27} kg.

Solución. *a*) De la conservación de la masa y el número atómico deducimos que el núcleo formado es el azufre 32:

$$ {}^{32}_{15}\mathrm{P} \;\rightarrow\; {}^{32}_{16}\mathrm{S} \;+\; {}^{\;\,0}_{-1}\mathrm{e} $$

b) La energía que gana el electrón es la energía de la reacción. Calculamos el defecto de masa:

$$ \Delta m = \frac{E}{c^2} = \frac{1,7 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{(3 \cdot 10^8)^2} = 3,022 \cdot 10^{-30}\ \mathrm{kg} = $$
$$ = 3,022 \cdot 10^{-30}\ \mathrm{kg} \cdot \frac{1\ \mathrm{u}}{1,66 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}} = 1,82 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{u} $$

y obtenemos la masa del azufre:

$$ \Delta m = m_{{}^{32}_{15}\mathrm{P}} - m_{{}^{32}_{16}\mathrm{S}} - m_{{}^{\;\,0}_{-1}\mathrm{e}} $$
$$ m_{{}^{32}_{16}\mathrm{S}} = m_{{}^{32}_{15}\mathrm{P}} - \Delta m - m_{{}^{\;\,0}_{-1}\mathrm{e}} $$
$$ m_{{}^{32}_{16}\mathrm{S}} = 31,973908 - 1,82 \cdot 10^{-3} - 5,5 \cdot 10^{-4} = 31,97\ \mathrm{u} $$

20. *a*) ¿Por qué en dos fenómenos tan diferentes como la fusión y la fisión nucleares, se libera una gran cantidad de energía? *b*) ¿Qué ventajas e inconvenientes presenta la obtención de energía por fusión nuclear frente a la obtenida por fisión?

Solución. *a*) Porque en ambos fenómenos la masa final es menor que la inicial y dicha diferencia se transforma en energía según la equivalencia masa-energía de Einstein. *b*) La fusión de hidrógeno para obtener helio presenta la ventaja de que se dispone de un combustible inagotable, puesto que el hidrógeno se obtendría del agua, y de que no produce residuos radiactivos. La electrolisis del agua para obtener hidrógeno es cara pero se vería compensada por la energía obtenida en la fusión. El inconveniente es que todavía no funciona. Para la fusión podríamos decir practicamente lo opuesto, el combustible es caro y limitado, produce residuos muy peligrosos durante miles de años pero actualmente funciona produciendo mucha de la electricidad que se consume en España, como se puede comprobar en la factura de la electricidad. Para obtener el combustible se deben procesar toneladas de mineral de uranio, habitualmente pechblenda (UO_2), para obtener uranio elemental, el cual está formado mayoritariamente por ${}_{235}\mathrm{U}$ y tan solo por el 0,7 % del isótopo fisionable ${}_{238}\mathrm{U}$. Además es necesario enriquecer el combustible hasta el 4 % de ${}_{238}\mathrm{U}$ y como los isótopos son químicamente indistinguibles solo podemos basarnos en la única magnitud que los distingue, la masa, y se puede hacer mediante centrifugación o mediante difusión gaseosa, y esta última consiste en pasar uranio gaseoso por una membrana semipermeable, pasando más fácilmente el más ligero.

21. Razone si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas: *a*) Una vez transcurridos dos periodos de semidesintegración, todos los núcleos de una muestra radiactiva se han desintegrado. *b*) La actividad de una muestra radiactiva es independiente del tiempo.

    Solución. *a*) Es falso porque se habra reducido a la cuarta parte puesto que en cada periodo de semidesintegración la muestra se reduce a la mitad. *b*) Falso, sí depende del tiempo puesto que el número de núcleos depende del tiempo:

    $$A = N\lambda = N_0\, e^{-\lambda t} \cdot \lambda$$

22. En un reactor tiene lugar la reacción:

    $$^{235}_{92}\mathrm{U} \;+\; ^{1}_{0}\mathrm{n} \;\rightarrow\; ^{141}_{56}\mathrm{Ba} \;+\; ^{92}_{Z}\mathrm{Kr} \;+\; a\, ^{1}_{0}\mathrm{n}$$

    a) Calcule el número atómico, OZ, del Kr, y el número de neutrones, a, emitidos en la reacción. *b*) ¿Qué masa de ^{235}U se consume por hora en una central nuclear de 800 MW, sabiendo que la energía liberada en la fisión de un átomo de ^{235}U es 200 MeV?
    Datos: $\mathrm{N_A} = 6,02 \cdot 10^{23}$ mol^{-1} y $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

    Solución. *a*) Para que se conserve la masa y el n.° atómico se tiene que cumplir:

    $$92 = 56 + Z \implies Z = 36$$

    $$235 + 1 = 141 + 92 + a \implies a = 3$$

    b) Primero calculemos la energía que se consume en una hora:

    $$E = \frac{800 \cdot 10^6 \text{ J}}{1 \text{ s}} \cdot \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} = 2,88 \cdot 10^{12}\ \frac{\text{J}}{\text{h}}$$

    Nos dicen la energía que se desprende al fisionarse un átomo:

    $$E' = 200 \cdot 10^6 \text{ eV} \cdot \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} = 3,2 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{J}}{\text{átomo}}$$

    y obtenemos la masa de uranio que se consume en una hora:

    $$m = 2,88 \cdot 10^{12} \text{ J} \cdot \frac{1 \text{ átomo}}{3,2 \cdot 10^{-11} \text{ J}} \cdot \frac{235 \text{ g}}{6,022 \cdot 10^{23} \text{ átomos}} = 35,12 \text{ g}$$

23. Enumere las interacciones fundamentales en la naturaleza y explique las características de cada una.

    Solución. Las interacciones fundamentales de la naturaleza son: gravitatoria, electromagnética, fuerte y débil. La gravitatoria tiene su origen en la masa de las partículas, es atractiva, tiene una intensidad relativa a la fuerte de 10^{-39} y un alcance infinito. La electromagnética tiene su origen en la carga de las partículas, puede ser atractiva o repulsiva, intensidad relativa de 10^{-2} y alcance infinito. La fuerte tiene su origen en los nucleones, es actractiva, intensidad relativa de 1 y alcance limitado al tamaño del núcleo. Sobre la débil, debido a su complejidad, solo indicar que tiene una intensidad relativa de 10^{-5} y alcance limitado al tamaño del núcleo. Cualquier fuerza conocida puede reducirse a una de estas cuatro interaciones. Así la tensión de una cuerda y la fuerza de rozamiento son interacciones electromagnéticas, en el primer caso las atracciones electromagnéticas entre las partículas de la cuerda impiden que se rompa, y en el segundo caso las atracciones electromagnéticas entre las partículas de las superficies generan la fuerza de rozamiento. La fuerza elástica de un muelle y la normal que ejercen las superficies también son electromagnéticas y la fuerza centrípeta ejercida por el Sol sobre la Tierra es una interacción gravitatoria.